

Deutsche Fassung von: H. Moldenhauer, Integration of Direction Fields with Standard Options in Finite Element Programs, Math. Comput. Appl. 2018, 23, 24; doi:10.3390/mca23020024

Integration von Richtungsfeldern mit Standard-Optionen in Abaqus

Herbert Moldenhauer

Dipl.-Ing. H. Moldenhauer GmbH, Im Brückengarten 9a, 63322 Rödermark, Deutschland,
hm@FEM-Moldenhauer.de, Tel.: 06074 1394

Zusammenfassung: Die zweidimensionale Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$ kann als Richtungsfeld interpretiert werden. Bei ihrer Integration können kommerzielle Finite Elemente (FE) Programme ohne zusätzlichen Programmieraufwand genutzt werden, sofern diese Programme Optionen zur Berechnung orthotroper Wärmeleitungsprobleme haben. Die zu integrierende Differenzialgleichung mit beliebiger Berandung wird als FE-Modell mit thermischen 2D-Elementen idealisiert. Ihre orthotropen Wärmeleitfähigkeiten werden mit $k_1=1$ und $k_2=0$ vorgegeben. Dabei ist k_1 parallel zu y' und k_2 senkrecht dazu orientiert. Für diesen extremen Fall wird gezeigt, dass die Isothermen identisch sind mit den Lösungskurven der Differenzialgleichung. Die Richtungsfelder können zum Beispiel Geschwindigkeitsvektoren in der Fluidmechanik oder **Hauptspannungs- (HS)** Richtungen in der Strukturmechanik sein. Für den letzteren Fall ergeben sich Anwendungsmöglichkeiten bei der Konstruktion von Faser-Kunststoff-Verbunden (FKV), da Faserverläufe, die den lokalen HS-Richtungen folgen, die überragenden Steifigkeits- und Festigkeitseigenschaften der Fasern ausnützen.

Stichwörter: Richtungsfeld, Tensorlinien, Hauptspannungen, Faserplatzierung, Wärmeleitung

1. Einführung

Extrem unterschiedliche Wärmeleitfähigkeiten orthotroper Materialien treten z.B. auf in Leiterplatten. Die stromdurchflossenen Leiterbahnen sind aus Kupfer und gegen die Kunststoffplatte elektrisch isoliert. Wegen ihrer geringen Wärmeleitfähigkeit k_2 heizt sich die Cu-Leitbahn (k_1) auf eine konstante, relativ hohe Temperatur auf. Sie kann als eine Isotherme angesehen werden. Der Wärmefluss q im Kunststoff infolge Leitung ist äußerst gering. Verlaufen zum Beispiel zwei Cu-Leiterbahnen parallel nebeneinander und haben diese unterschiedliche Temperaturen, so herrscht stationär im dazwischenliegenden Kunststoff ein von k_2 unabhängiger Temperaturgradient, auch wenn $k_2 \rightarrow 0$ und somit $q \rightarrow 0$. Die isotropen Wärmeleitfähigkeiten der Cu-Leiterbahnen mit den dazwischenliegenden Kunststoffisolatoren können in einem Gedankenmodell auf ein homogen orthotropes Material übertragen werden. Die gekrümmt geführten Leiterbahnen sind dort unendlich dicht angeordnet, Stromrichtung und k_1 sind gleichgerichtet. Senkrecht dazu wirkt die Isolation mit $k_2 \ll k_1$. Werden die (unendlich dicht) geführten Leiterbahnen parallel zu einem beliebigen Richtungsfeld $y' = f(x, y)$ geführt, so soll folgende Hypothese mathematisch verifiziert werden:

Hypothese: Die Isothermen eines orthotropen stationären 2D-Wärmeleitungsproblems mit den Wärmeleitfähigkeiten k_1 und k_2 , tangieren ein beliebig vorgegebenes Richtungsfeld $y' = f(x, y)$, sofern die lokale Orientierung von k_1 dem Richtungsfeld y' folgt und senkrecht dazu perfekte Isolation besteht ($k_2=0$).

Die Integrationsmethode, die aus der Hypothese abgeleitet werden kann, ist Thema der Dissertation in [1], jedoch erfolgte die Veröffentlichung ohne mathematische Verifikation. Zweidimensionale Richtungsfelder der Art $y' = f(x, y)$ können physikalisch verschiedene Vorgänge beschreiben. In der Strömungsmechanik zum Beispiel tangiert das vektorielle Richtungsfeld $y' = v(x, y)/u(x, y)$ der Geschwindigkeitskomponenten u und v die Stromlinien. Die allgemeine Lösung des zu integrierenden Richtungsfelds liefert das Strömungsfeld in Form von Stromlinien. Diese Aufgabe wird jedoch

in Computational Fluid Dynamics (CFD) Programmen standardmäßig gelöst und wird deshalb hier nicht weiter verfolgt. Die Visualisierung von Tensorfeldern ist dagegen in kommerziellen FE-Programmen in Form von Tensorlinien nicht vorhanden. Diese Darstellungsform ist Gegenstand zahlreicher Untersuchungen, z.B. [2-6] und erfordert generell spezielle Auswertungsprogramme. Ziel dieser Veröffentlichung ist zu zeigen, dass Tensorlinien in 2D mit kommerziellen FE-Programmen ohne Zusatzsoftware berechnet werden können.

Die Visualisierung dieser Verläufe ist für die Interpretation des Kraftflusses in der Struktur hilfreich. Darüber hinaus sind die HS-Linien in FKV-Konstruktionen von besonderem Interesse, da Faserverläufe, die den lokalen HS-Richtungen folgen, die überragenden Steifigkeits- und Festigkeitseigenschaften der Fasern ausnützen [1,7-10].

Bild 1a zeigt ein herkömmliches Standardintegrationsverfahren, angewandt auf die Unterseite einer Schalenstruktur.

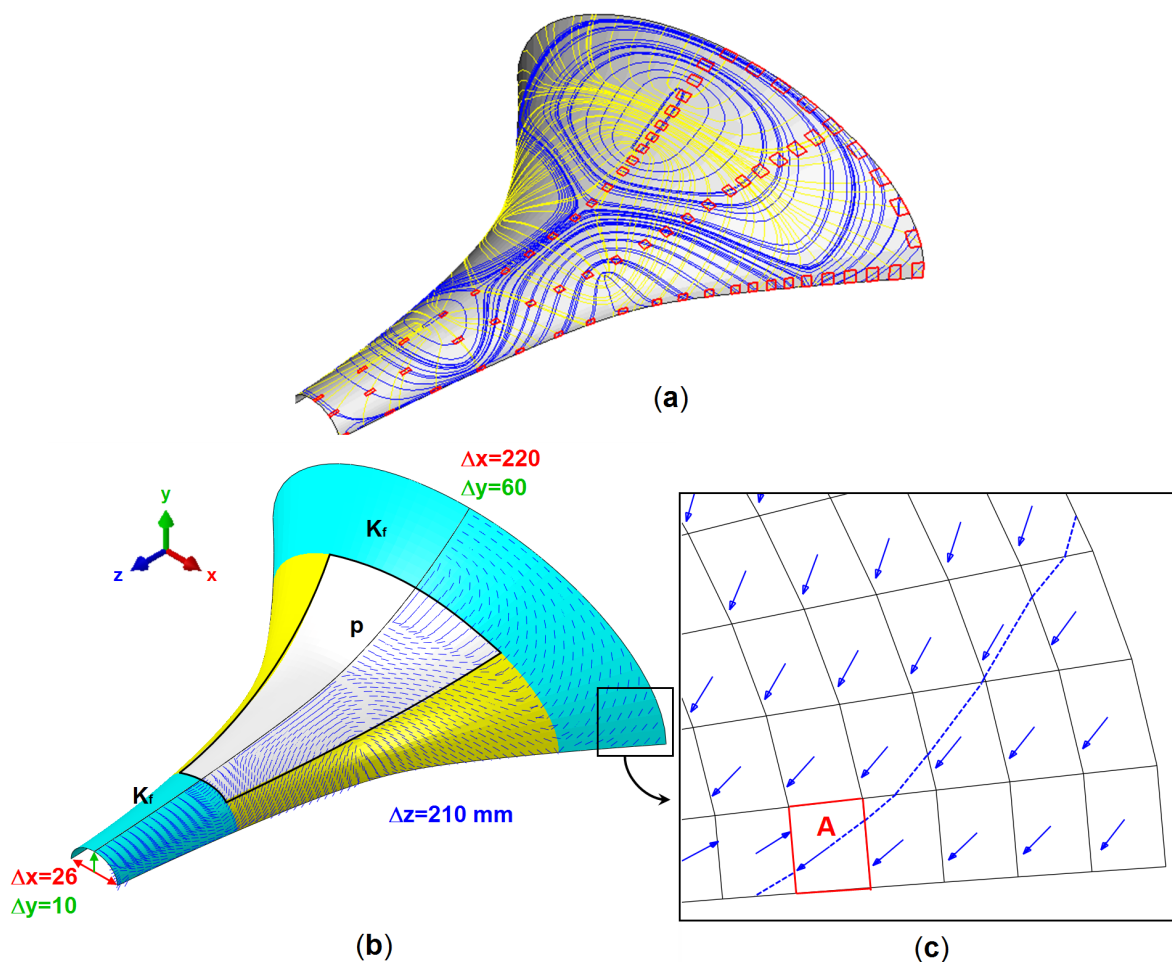


Bild 1. Schale unter Druckbelastung p , elastisch gebettet (k_f): (a) Spannungstrajektorien, Standard-Integration beginnt in den roten Startelementen; (b) HS-Richtungen, charakteristische Inputdaten; (c) Detail, Standardintegration beginnt im Startelement A. Eine höhere Genauigkeit wird durch Netzverfeinerung erreicht.

Bild 1b zeigt die HS-Richtungen der blauen Hauptspannungstrajektorien auf der Schalenunterseite. In der Schalenmittelebene und auf der Oberseite liegen andere HS-Richtungen vor, da Membran- und Biegespannungen simultan auftreten. Diese Richtungen ergeben sich jeweils aus einem Eigenwertproblem des Spannungstensors, dessen Eigenvektoren (HS-Richtungen) im Vorzeichen unbestimmt bleiben. Die HS-Richtungen können deshalb von einem Element zum Nachbar-element das Vorzeichen wechseln. Das Integrationsschema in Bild 1c berücksichtigt diese problema-

tische Situation, indem der Richtungsvektor durch ein Richtungselement ersetzt wird. Das Richtungselement schneidet zwei gegenüberliegende Elementseiten und erlaubt dadurch, dass die Integration in den zwei Nachbarelementen mit deren Richtungselementen sukzessive fortgesetzt werden kann. Jedes Startelement (rot markiert) in Bild 1a liefert mit dieser gerade beschriebenen Prozedur zwei Einzelfaserverläufe entsprechend den beiden HS-Richtungen. Eine regelmäßige Platzierung der Startelemente garantiert keineswegs eine gleichförmige Verteilung der HS-Linien. Eine Homogenisierung der Faserabstände wird nur mit erheblichem Aufwand erreicht. Ein weiterer Nachteil dieser Vorgehensweise ist sofort ersichtlich. Jede einzelne Trajektorie (Faser) muss separat berechnet werden. Ändert der Konstrukteur aus Festigkeitsgründen den Faservolumenanteil, so ist die Prozedur von Anfang an zu wiederholen.

Dieses Problem wird wesentlich vereinfacht durch die oben aufgestellte Hypothese, die mittels der orthotropen Wärmeleitung in FE-Programmen modelliert werden kann. Da das zweidimensionale Richtungsfeld der Hauptspannungen einen ebenen Spannungszustand beschreibt, können auch Schalen mit beliebiger Berandung behandelt werden. Der weitere Vorteil besteht darin, dass die Gesamtheit aller HS-Trajektorien (Faserverläufe) mittels einer einzigen Wärmeleitungsberechnung ermittelt werden kann. Falls nachträglich der Faservolumenanteil erhöht wird, werden aus dem kontinuierlich vorliegenden Temperaturfeld entsprechend mehr Isothermen (Faserverläufe) extrahiert.

Die vorgeschlagene Berechnungsalternative zur Integration von $y' = f(x, y)$ beruht auf den extrem sich ändernden Eigenschaften des Fourierschen Wärmeleitungsgesetzes für $k_1/k_2 \rightarrow \infty$. Das folgende Kapitel liefert eine mathematische Verifikation der oben aufgestellten Hypothese. Die Praktikabilität des Integrationsverfahrens beruht dabei auf der Unabhängigkeit von thermischen Randbedingungen: Die Isothermen folgen in singularitätsfreien Gebieten stets dem Richtungsfeld. Der (gewichtete) Abstand der Isothermen zueinander wird jedoch durch die Randbedingungen beeinflusst und kann durch diese gesteuert werden. Im 3. Kapitel wird dem FE-Anwender die Vorgehensweise anhand von einigen Regeln aufgezeigt und diese an Beispielen praktisch demonstriert. Dabei wird der Einfluss des Orthotropieverhältnisses k_1/k_2 sowie der Einfluss von Singularitäten auf den Verlauf der Isothermen untersucht.

2. Die Integration von Richtungsfeldern mithilfe der orthotropen Wärmeleitungsgleichung

Das Richtungsfeld ist durch eine gewöhnliche Differenzialgleichung erster Ordnung im kartesischen Koordinatensystem (x, y) gegeben:

$$y' = f(x, y). \quad (1)$$

Entsprechend der Hypothese im vorigen Kapitel soll nachgewiesen werden, dass die orthotrope Wärmeleitung zur Integration dieser Gleichung eingesetzt werden kann.

2.1 Das anisotrope Fouriersche Wärmeleitungsgesetz und die Wärmeleitungsgleichung

Verifikation der Hypothese: Im zweidimensionalen Fall ist das anisotrope Fouriersche Wärmeleitungsgesetz durch Gleichung (2), die stationäre Wärmebilanz ohne innere Wärmequellen durch Gleichung (3) gegeben [11]:

$$q_x = - \left(k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (2a)$$

$$q_y = - \left(k_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (2b)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Werden diese Gleichungen kombiniert, so resultiert daraus die anisotrope Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0. \quad (4)$$

Ist die orthotrope (Haupt-)Wärmeleitfähigkeit k_1 entsprechend dem Richtungsfeld der Gleichung (1) orientiert (mit k_2 senkrecht auf k_1), so muss diese in das kartesische System transformiert werden. Die Transformationsgleichungen für den 2D-Wärmeleitungstensor sind analog zu einem 2D-Spannungstensor und können über trigonometrische Beziehungen mit dem Mohrschen (Spannungs-)Kreis veranschaulicht werden, Bild 2.

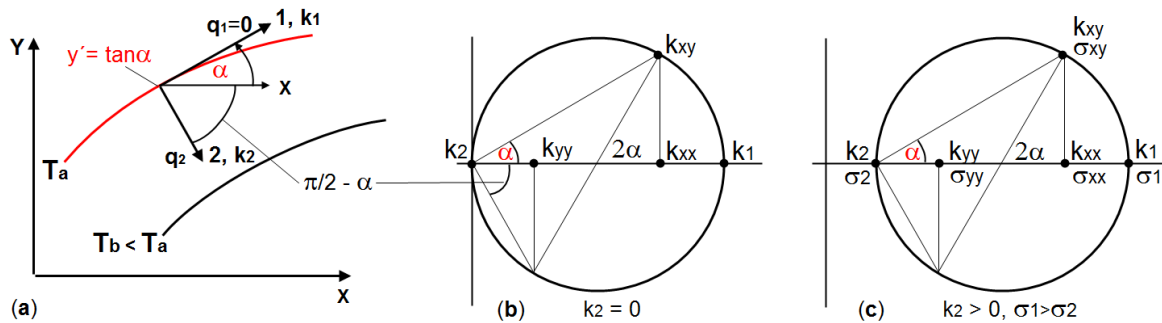


Bild 2. Transformation zwischen lokalen und globalen Tensoren $\mathbf{k}$ der Wärmeleitfähigkeit: (a) Winkel α und $(\pi/2) - \alpha$ zwischen lokalem System (1,2) und der globalen x-Achse im Temperaturfeld $T(x,y)$, $\mathbf{q}$ =Wärmestromdichte; (b) Mohrscher Kreis für $k_1>0$ und $k_2=0$; (c) Mohrscher Kreis für $k_1>0$ und $k_2>0$ mit Analogie zum Mohrschen Spannungskreis.

$$k_{xx} = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha = \frac{k_1}{1 + \tan^2 \alpha} + \frac{k_2 \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{k_1}{1 + f^2} + \frac{k_2 f^2}{1 + f^2}, \quad (5a)$$

$$k_{xy} = k_{yx} = (k_1 - k_2) \sin \alpha \cos \alpha = (k_1 - k_2) \frac{f}{1 + f^2}, \quad (5b)$$

$$k_{yy} = k_1 \sin^2 \alpha + k_2 \cos^2 \alpha = \frac{k_1 f^2}{1 + f^2} + \frac{k_2}{1 + f^2}. \quad (5c)$$

Im Hinblick auf die Hypothese in Kap. 1 ist nur der Fall $k_1/k_2 \rightarrow \infty$ von Interesse. Die Herleitung gestaltet sich übersichtlich, wenn schon jetzt $k_1>0$ und $k_2=0$ gesetzt wird. Für diesen speziellen Fall folgt nach dem Einsetzen von Gleichung (5) in (2)

$$q_x = - \left(k_1 \frac{\partial T}{\partial x} + k_1 f \frac{\partial T}{\partial y} \right) / (1 + f^2), \quad (6a)$$

$$q_y = - \left(k_1 f \frac{\partial T}{\partial x} + k_1 f^2 \frac{\partial T}{\partial y} \right) / (1 + f^2). \quad (6b)$$

In FE-Programmen wird die Wärmeleitungsgleichung (4) gelöst. Setzt man Gleichung (6) in (2) ein, so ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_1}{1 + f^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k_1 f}{1 + f^2} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_1 f}{1 + f^2} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k_1 f^2}{1 + f^2} \frac{\partial T}{\partial y} \right) = 0. \quad (7)$$

Die Temperaturverteilung $T(x,y)$ der Gleichung (7) kann über die Darstellung der Isothermen erfolgen, die ihrerseits ein Richtungsfeld y'_T repräsentieren. Eine Isotherme ist durch eine konstante Temperatur C gekennzeichnet. Ihre Gleichung in impliziter Form ist durch $F(x,y)=T(x,y)-C=0$ gegeben. Ein Richtungselement dieser Kurve hat die Steigung

$$y'_T = -\frac{\partial F / \partial x}{\partial F / \partial y} = -\frac{\partial T / \partial x}{\partial T / \partial y}. \quad (8)$$

Es stellt sich die Frage, welche Eigenschaften Gleichung (6) zeigt, wenn die Gleichungen (1) und (8) gleichgesetzt werden:

$$y' = f(x, y) = f = -\frac{\partial T / \partial x}{\partial T / \partial y} = y'_T \quad (9)$$

Einsetzen von f der Gleichung (9) in den Zähler der Gleichung (6) ergibt in ausführlicher Form

$$q_x = -\left(k_1 \frac{\partial T}{\partial x} + k_1 \left(-\frac{\partial T / \partial x}{\partial T / \partial y}\right) \frac{\partial T}{\partial y}\right) / (1 + f^2) = 0, \quad (10a)$$

$$q_y = -\left(k_1 \left(-\frac{\partial T / \partial x}{\partial T / \partial y}\right) \frac{\partial T}{\partial x} + k_1 \left(-\frac{\partial T / \partial x}{\partial T / \partial y}\right)^2 \frac{\partial T}{\partial y}\right) / (1 + f^2) = 0 \quad (10b)$$

und zusammengefasst

$$q_x = q_y = \frac{\partial T}{\partial x} + f \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (11)$$

Für diesen Extremfall sind beide Komponenten des Wärmeflusses $\mathbf{q}=[q_x, q_y]$ identisch null. Damit sind auch die Wärmestromkomponenten q_1 und q_2 parallel zu den orthotropen (Haupt-)Wärmeleitfähigkeiten (k_1, k_2) in Bild 2a ebenfalls null. Die sich so ergebenden Isothermen widersprechen nicht ihrer Definition: Der Wärmefluss längs einer Isothermen ist null, senkrecht dazu wegen $k_2=0$ ebenfalls null.

Gleichung (11) liefert den Beweis für die Hypothese in Kap. 1. Zur Erläuterung dieser Behauptung soll folgendes beachtet werden. Folgt für den Spezialfall $k_1=1$ und $k_2=0$ die k_1 -Richtung dem vom Anwender spezifizierten Richtungsfeld $y'=f(x,y)$ (d.h., beide Richtungen sind stets parallel zueinander), so geht Gleichung (2) in (6) über. Die dazu gehörige Wärmeleitungsgleichung (7) wurde durch Divergenzbildung aus Gleichung (6) durch Anwendung der Gleichung (2) abgeleitet. Gleichung (7) ist demnach weiterhin der Spezialfall, dass nur ein Temperaturfeld gesucht wird, dessen k_1 -Richtung dem Richtungsfeld $y'=f(x,y)$ folgt (mit $k_2=0$). Dieses Temperaturfeld kann durch Isothermen dargestellt werden, deren Tangenten in der x - y -Ebene indirekt ein Richtungsfeld y'_T liefern. Beide Richtungsfelder, y' und y'_T , sind nicht a priori identisch, sie werden jedoch zunächst hypothetisch gleichgesetzt, siehe Gleichung (9), um die Auswirkung auf das Fouriersche Wärmeleitungsgesetz zu studieren. Das Resultat ist Gleichung (11). Aus dem Fourierschen Wärmeleitungsgesetz mit den Unbekannten T und $\mathbf{q}$ ist eine Gleichung geworden für T allein, sofern die Isothermen in k_2 -Richtung voneinander perfekt isoliert sind ($k_2=0$). Im gesamten Integrationsgebiet ist $\mathbf{q}$ überall null, d.h., $q_x=q_y=q_1=q_2=0$. Die Divergenz der Wärmeströme liefert die Wärmeleitungsgleichung, mit $\mathbf{q}=0$ geht die Gleichung (7) über in die Identität $0=0$. Die Gleichsetzung $y'=y'_T$ der beiden Richtungsfelder war gerechtfertigt, um die Hypothese in Kap. 1 zu verifizieren. Das von Anwender vorgegebene (eindeutige) Richtungsfeld $y'=f(x,y)$ erfüllt die Wärmeleitungsgleichung identisch an jedem Punkt der x - y -Ebene sofern $k_2=0$ und k_1 parallel zu y' ist. Das FE-Programm löst Gleichung (7) und liefert das Temperaturfeld, dessen Isothermen die integrale Lösung von $y'=f(x,y)$ ist. Der Fall nicht eindeutiger Richtungsfelder mit singulären Punkten wird in Kap. 3.2 behandelt.

2.2 Der Zusammenhang zwischen den Isothermen einer extrem orthotropen Wärmeleitung und den Charakteristiken einer partiellen linearen Differenzialgleichung 1. Ordnung

Die lineare partielle Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$A(x, y) \frac{\partial T}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (12)$$

ist in der Literatur ausführlich behandelt [12-14]. Die gesuchte Funktion $T(x, y)$ stellt eine Fläche im x - y - z -Raum dar. Die Theorie der 'Charakteristikenmethode' zur Lösung der Gleichung (12) besagt, dass ihre Charakteristiken die Niveaulinien der Fläche $T(x, y)$ sind und durch die gewöhnliche Differenzialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = B(x, y) / A(x, y) \quad (13)$$

mit $A \neq 0$ berechnet werden können [12-14]. Die Ähnlichkeit von Gleichung (11) mit (12) ist für $A=1$ offensichtlich:

$$\frac{\partial T}{\partial x} + B \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial x} + f \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \quad (14)$$

Längs der Charakteristiken ist die Lösungsvariable T konstant, sie können somit als Isothermen interpretiert werden. Physikalisch beschreibt Gleichung (14) den konvektiven Transport der Variablen T . Eine einfache Transportgleichung lautet [12]

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (15)$$

mit der Zeit t und der Konvektionsgeschwindigkeit $u=dx/dt$. Die Variable T steht hier für die Temperatur, sie könnte auch für Masse, Impuls oder Energie stehen. Um die besonderen Eigenschaften der Fourierschen Wärmeleitung mit $k_2=0$ an einem einfachen Beispiel zu demonstrieren, wird in Gleichung (11) $f=1$ und in (15) $u=1$ gesetzt. Damit sind beide Gleichungen formal identisch, die Ortsvariable y in Gleichung (11) entspricht der Zeitvariablen t in (15). Mit $y'=f(x, y)=1$ wird entsprechend der Hypothese in Kap. 1 erwartet, dass die Isothermen sich durch die Geraden $y=x+C$ darstellen lassen. Bild 3 zeigt die entsprechende Lösung für die Gleichungen (11) bzw. (15), die mit dem FE-Programm ABAQUS (Dassault Systèmes, Vélizy-Villacoublay, Frankreich) erzielt wurde.

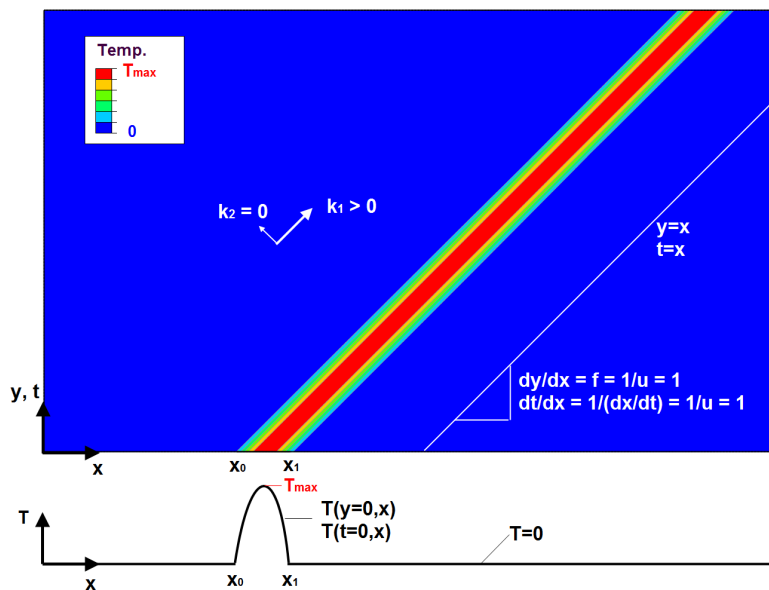


Bild 3. Die Fouriersche Wärmeleitungsgleichung mit $k_1/k_2 \rightarrow \infty$ ist hyperbolisch und hat Transportcharakter. Die Darstellung ist sowohl für die x - y -Ebene als auch die x - t -Ebene gültig. Mit ihr lässt sich mit Standard FE-Programmen das Richtungsfeld $y'=f(x, y)$ integrieren (hier $y'=1$).

Die Anfangsbedingung für $T(t=0, x_0 \leq x \leq x_1)$ bzw. $(y=0, x_0 \leq x \leq x_1)$ ist durch eine parabelförmige Temperaturverteilung gegeben. Die Orientierung von k_1 ist im gesamten Lösungsgebiet durch den Vektor $[1, 1]$ gegeben, sein Betrag ist beliebig. Extreme Orthotropie wird durch Nullsetzung von k_2 erreicht, wobei k_2 senkrecht auf k_1 steht.

Die Isothermen im Bild 3 stellen sowohl die allgemeine Lösung für die zweidimensionale Gleichung (11) in der x - y -Ebene dar als auch die zeitabhängige Lösung für die eindimensionale Gleichung (15) in der x - t -Ebene. Die Isothermen folgen dem Richtungsfeld $y'=1$ nicht nur im Inneren des rechteckförmigen Bereichs, sondern auch auf dem Rand.

Die Hypothese im Kap. 1 gilt nur für stationäre Temperaturzustände mit den Ortsvariablen x und y . Wird dieses Problem transient gerechnet mit den Variablen x , y und t , so breitet sich die parabelförmige Anfangstemperaturverteilung entsprechend ihrer Temperaturleitzahl $a=k_1/(c \cdot \rho)$ mit endlicher Geschwindigkeit aus (c =spez. Wärme, ρ =Dichte). Wie aus Bild 4 zu entnehmen ist, sind die beispielhaft eingezeichneten $0.01 \cdot T_{\max}$ -Isothermen zur Zeit $t_1 < t_2 < t_3$ nicht parallel zum Richtungsfeld $y'=1$. Nur für den stationären Fall mit $t \rightarrow \infty$ trifft dies zu.

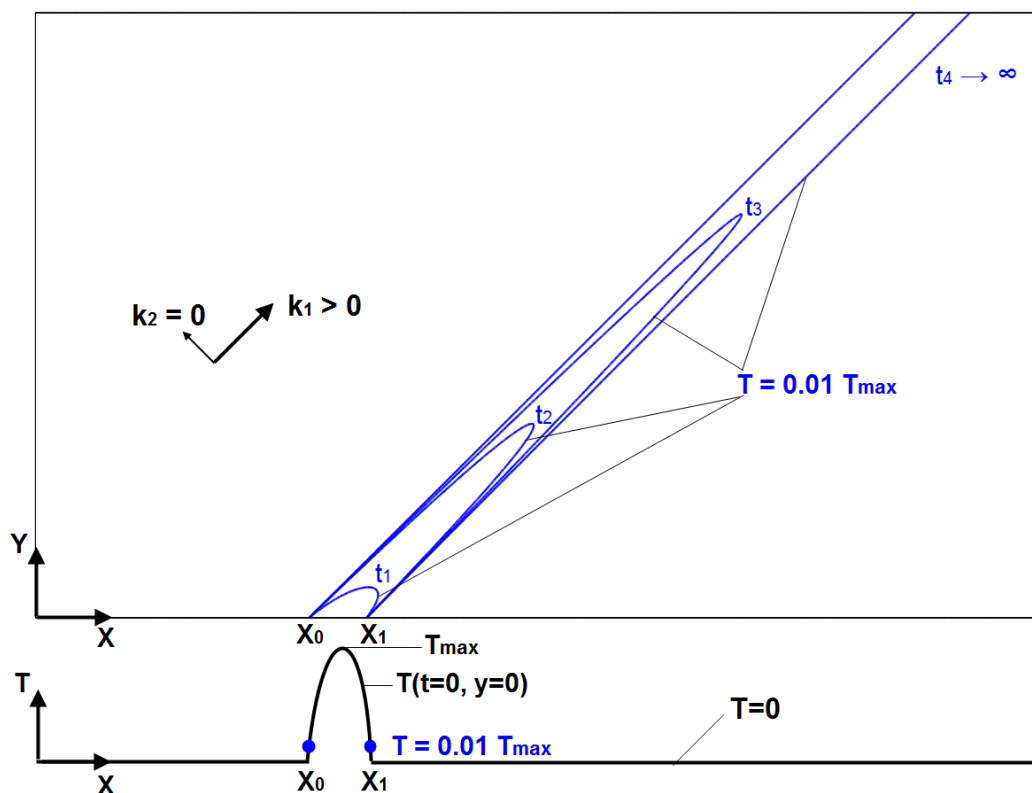


Bild 4. Das stationäre Problem aus Bild 3 instationär gerechnet. Nur für den stationären Endzustand mit $t \rightarrow \infty$ sind die Isothermen parallel zum vorgegebenen Richtungsfeld $y'=1$.

2.3 Temperaturrandbedingungen für die extrem orthotrope Wärmeleitung

In FE-Programmen werden die Gleichungen (4) bzw. (7) gelöst. Diese sind 2. Ordnung und benötigen Dirichlet- oder Neumann-Randbedingungen oder eine Mixtur aus diesen beiden längs der Randkontur. Nicht spezifizierte Bedingungen auf dem Rand beinhalten $\partial T / \partial \mathbf{n} = \mathbf{q} = 0$. Bei extremer Orthotropie mit $k_1 > 0$ und $k_2 = 0$ ist letztere Bedingung sowohl im Inneren als auch auf dem Rand entsprechend der Gleichung (11) stets erfüllt, es müssen demnach prinzipiell keine weiteren Bedingungen vorgegeben werden. Ohne Spezifikation einer Referenztemperatur ist die FE-Lösung jedoch singulär. Wird an einem beliebigen Knoten eine solche Referenztemperatur T_{ref} spezifiziert, erhält man jedoch nur die triviale Lösung $T(x, y) = T_{\text{ref}}$. Es sind somit mindestens zwei unterschiedliche Temperaturen an zwei verschiedenen Knoten vorzugeben, um eine nichttriviale Lösung zu erhalten.

ten. Alle Temperaturrandbedingungen, die auf zwei bzw. mehr Knoten vorgegeben werden, liefern Isothermen, die das vorgegebene Richtungsfeld $y'=f(x,y)$ tangieren. Der Unterschied der Isothermenbilder für die 2-Knoten- bzw. Mehrknoten-Randbedingung ist in ihrer unterschiedlichen Wichtung zu sehen. Um problemgerechte Lösungen zu erhalten, muss das Richtungsfeld im Zusammenhang mit der physikalischen Aufgabenstellung gesehen werden. Im Bild 5 ist eine Scheibe (Halbmodell) mit ellipsenförmiger Aussparung unter reiner Biegung dargestellt.

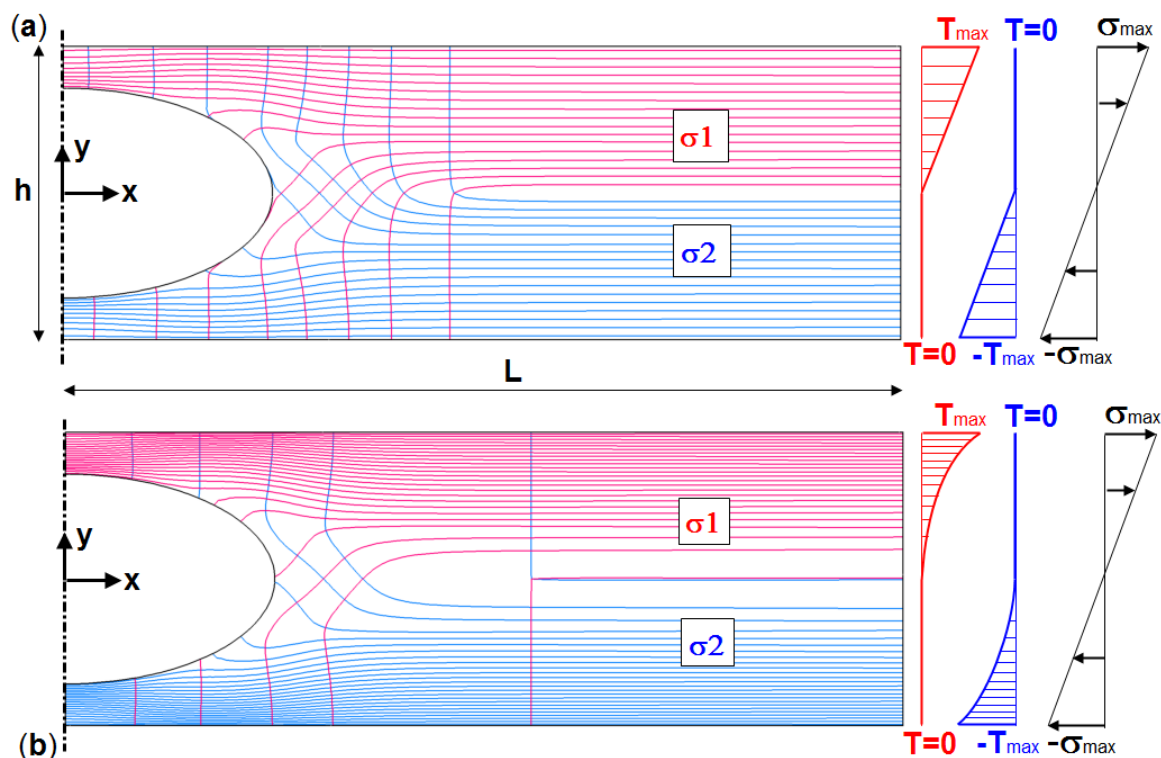


Bild 5. FKV-Scheibe mit Loch unter Biegung: (a) Temperaturrandbedingungen für die σ_1 - bzw. σ_2 -Trajektorien, jeweils linear, ergeben eine gleichförmige Verteilung der Fasern (Isothermen); (b) parabelförmige Temperaturrandbedingungen ergeben eine gewichtete Verteilung der Fasern, die der Biegebelastung besser entsprechen.

Eine FKV-Konstruktion kann zum einen eine möglichst gleichförmige Faserplatzierung zum Ziel haben. Dies wird in einer ersten orthotropen Wärmeleitungsanalyse durch eine lineare Temperaturverteilung für $y>0$ längs des rechten Rands erreicht (Bild 5a). Die Isothermen als Repräsentanten der σ_1 -Trajektorien sind dann ebenfalls äquidistant verteilt. Für $y<0$ wird $T=0$ oder gar nicht definiert. Letztere Bedingung entspricht dann $q=0$. In einer zweiten orthotropen Wärmeleitungsanalyse werden die σ_2 -Trajektorien berechnet. Diese erfordern eine lineare Temperaturverteilung für $y<0$. Beide Isothermenbilder werden superponiert und ergeben die zwei Faserschichten in Bild 5a.

Ist die Zielsetzung auf eine lastgerechte Faserplatzierung ausgerichtet, so wird durch jeweils parabelförmig vorgegebene Temperaturverteilungen für $y>0$ (σ_1 -Trajektorie) bzw. $y<0$ (σ_2 -Trajektorie) längs des rechten Rands eine linear gewichtete Verteilung der Isothermen erzielt, s. Bild 5b.

Die 2-Knoten-Temperaturrandbedingung ist ebenfalls möglich. Zur Ermittlung der σ_1 -Trajektorie wird $T(L, h/2)=T_{\max}$, $T(L, 0)=0$ gesetzt und liefert ähnliche Ergebnisse wie Bild 5a, die Isothermen sind dann jedoch nicht exakt äquidistant am rechten Rand verteilt, s. auch Kap. 3.1.

In Kap. 2.1 wurde gezeigt, dass bei extremer Orthotropie ($k_1>0$, $k_2=0$) die Differenzialgleichung (7) 2. Ordnung und die Fouriersche Wärmeleitungsgleichung (11) 1. Ordnung physikalisch den gleichen Sachverhalt beschreiben. In Kap. 2.2 wurde gezeigt, dass die Fouriersche Wärmeleitungsgleichung (11) auf die allgemeine lineare Differenzialgleichung (12) zurückgeführt werden kann. Die Integration der dazugehörigen charakteristischen Gleichung (13) liefert die Charakteristi-

ken, die identisch sind mit den Isothermen der Fourierschen Wärmeleitungsgleichung (11). Die Theorie der Charakteristiken umfasst auch die Behandlung der Randbedingungen [14]. Deren Regeln können komplett auf die Fouriersche Wärmeleitungsgleichung (14) angewandt werden, das wichtigste Ergebnis zeigt Bild 6.

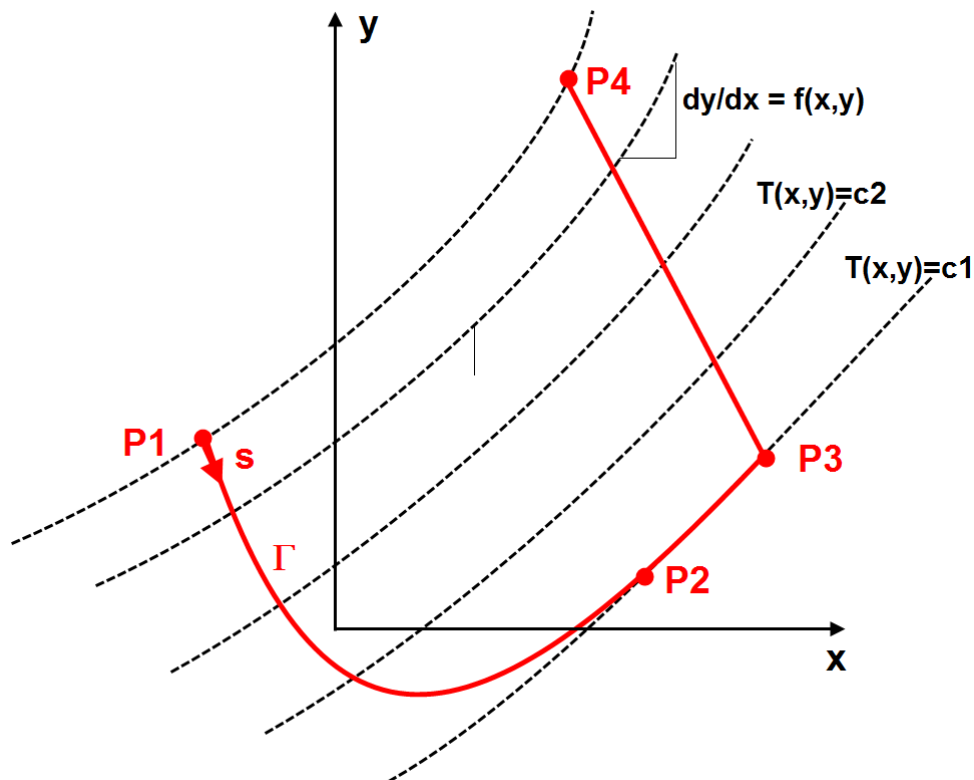


Bild 6. Die Lösungskurven des Richtungsfelds $y'=f(x,y)$ sind gleichzeitig die Charakteristiken der Fourierschen Wärmeleitungsgleichung. Die Vorgabe beliebiger Randbedingungen längs P2P3 ist nicht erlaubt, da dieses Kurvenstück eine Charakteristik bzw. Isolinie ($y=\text{konst.}$) ist.

Demnach wird Gleichung (12) integriert durch die Vorgabe der Lösungsvariablen T längs einer Kurve Γ . Zulässig ist jedoch nur die Spezifikation auf dem Kurvenstück P1P2. Da auf einer Charakteristik die Lösungsvariable konstant ist, sind beliebige Vorgaben längs P2P3 nicht erlaubt. Zudem führen beliebige Vorgaben längs P3P4 zu widersprüchlichen Definitionen mit den Vorgaben längs P1P2. Die Kurve Γ muss nicht notwendigerweise auf dem Rand liegen, sondern kann auch im Inneren des Integrationsgebiets verlaufen.

3. Vorgehensweise und Anwendungsbeispiele

Das zu integrierende Richtungsfeld $y'=f(x,y)$ stammt in den folgenden drei strukturmechanischen Beispielen aus FE-Analysen in Form von HS-Richtungen. Zuvor soll die Vorgehensweise an Hand einiger Regeln festgelegt werden:

1. Berechnung der Richtung der größten Hauptspannung (Scheibe, Platte bzw. Schale). Falls diese vom jeweilig verwendeten FE-Programm nicht geliefert wird, können diese über die Spannungskomponenten $[\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{xy}]$ durch $y'=\text{dy/dx}=\tan\alpha_1=\sigma_{xy}/(\sigma_{xx}-\sigma_2)$ berechnet werden, s. auch Bild 2c. Platten und Schalen haben über die Dicke veränderliche Spannungen, das Richtungsfeld ist deshalb für jeden „Dickenintegrationspunkt“ auszuwerten.
2. Austausch der Strukturelemente durch thermische Elemente.

3. Elementweise Festlegung der lokalen 1-Richtung entsprechend der zuvor gerechneten HS-Richtung. Diese Festlegung ist abhängig vom benutzten FE-Programm (ABAUS: *Orientation).
4. Zuordnung orthotroper Wärmeleitfähigkeiten k_1 und k_2 in diesen Lokalsystemen mit extremen Verhältnissen, z.B. $k_1/k_2 > 10^4$. (In ABAQUS ist $k_2=0$ erlaubt.)
5. Definition der thermischen Randbedingungen entsprechend Kap. 2.3.
6. $k_1/k_2 > 10^4$ liefert die HS-Trajektorien zur ersten, $k_2/k_1 > 10^4$ zur zweiten Hauptspannung. Der Betrag von k_1 bzw. k_2 und ein konstanter multiplikativer Faktor auf die Temperaturrandbedingungen haben keinen Einfluss auf die Verteilung der Trajektorien (Isothermen).

Es soll an dieser Stelle besonders betont werden, dass die Integration der HS-Richtungen zur Berechnung des realen Faserverlaufs eine eigenständige, von der Strukturberechnung eines Laminats unabhängige Aufgabe ist. Das HS-Richtungsfeld der Strukturberechnung wird als Materialorientierung für die Wärmeleitfähigkeiten in der thermischen Analyse übernommen. Die Randbedingungen sind in den beiden Analysen autark und haben nichts miteinander zu tun.

3.1 Beispiel 1: Einfluss des Orthotropieverhältnisses k_1/k_2 auf den Verlauf der Isothermen

Bild 7 zeigt eine Lochscheibe unter axialem Zug. Aufgrund der doppelten Symmetrie genügt ein Viertelmodell.

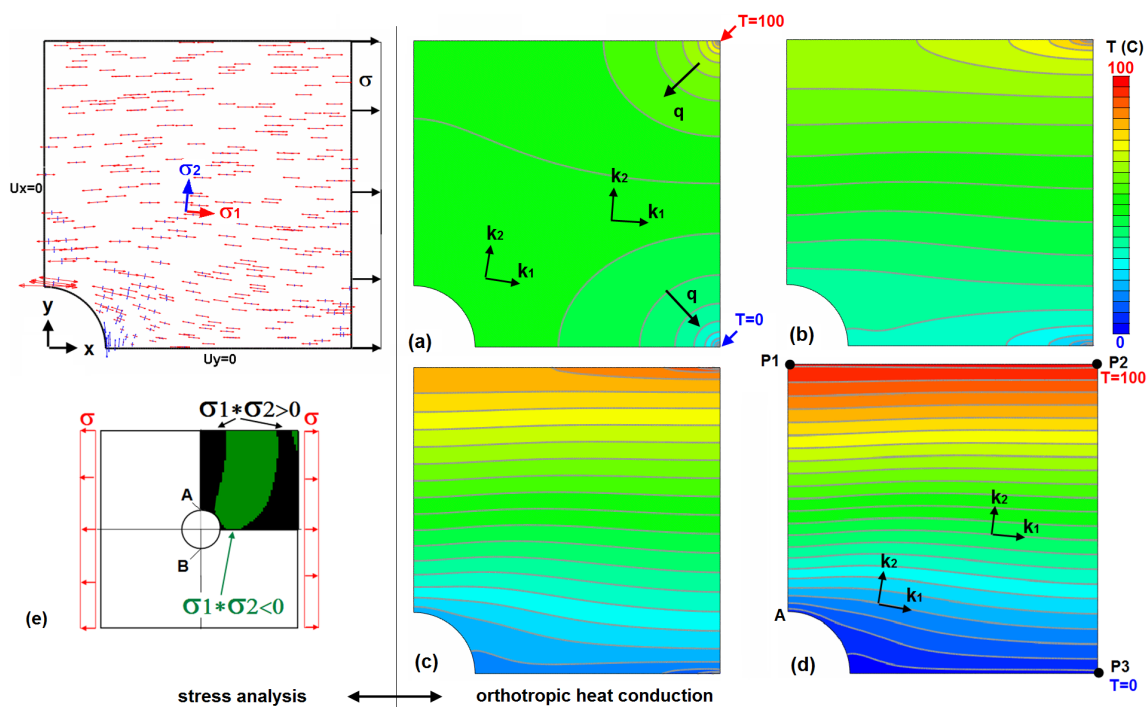


Bild 7. Lochscheibe unter axialem Zug, Berechnung der HS-Linien (Isothermen) in Abhängigkeit der Wärmeleitorthotropie k_1/k_2 , die Orientierung von k_1 und k_2 entspricht den HS-Richtungen: (a) $k_1/k_2=1$; (b) $k_1/k_2=16$; (c) $k_1/k_2=128$; (d) $k_1/k_2=4096$; (e) Vorzeichen der beiden Hauptspannungen, ihr Einfluss auf die optimale Faserplatzierung wird in Kap. 3.4 behandelt.

Die Aufgabe besteht darin, für einen FKV-Konstruktion die Fasern in Richtung der größten Hauptspannung zu platzieren. Die HS-Richtungen stellen das Richtungsfeld $y'=f(x,y)$ dar, das zu integrieren ist. Die Elemente des strukturmekanischen Modells werden durch Wärmeleitungselemente ersetzt, deren Wärmeleitfähigkeit k_1 parallel zu den zuvor gerechneten HS-Richtungen von σ_1 orientiert wird. Die k_2 -Richtung ist orthogonal zu k_1 . Wird nun das Verhältnis von k_1/k_2 sukzessive gesteigert, so tangieren die Isothermen zunehmend die HS-Richtung von σ_1 . Der Einfluss der 2-Knoten-Temperaturrandbedingung in den Punkten P2 und P3 (Bild 7d) auf den Verlauf der Isother-

men ist für $k_1/k_2 > 10^4$ nicht mehr wahrnehmbar. Bei solch einfachen Randbedingungen ist darauf zu achten, dass ein möglichst großer Temperaturbereich erfasst wird. Werden die beiden Temperaturen in den Punkten P1 und P2 festgelegt, so werden praktisch auf einer Isothermen zwei unterschiedliche Temperaturen spezifiziert. Wie im Kapitel 2.3 gezeigt wurde, ist die Isotherme identisch mit der Charakteristik der Gleichung (14), auf der die Lösungsvariable konstant ist. Es ist deshalb unzulässig, zwei unterschiedliche Temperaturen auf einer Charakteristik vorzugeben, s. auch Bild 6.

Bemerkenswert ist die relativ gleichförmige Verteilung der HS-Trajektorien, obwohl nur eine sehr einfache Temperaturrandbedingung gewählt wurde. Möchte man eine exakt äquidistante Verteilung der Isothermen zwischen P3 und P2 haben, so ist die Temperatur längs dieser Strecke linear ansteigend vorzugeben. Da die Isothermen den Faserverlauf repräsentieren, wird mit dieser Vorgehensweise die konstante Krafteinleitung längs P3P2 gleichförmig von den Fasern aufgenommen. Die maximale Beanspruchung in der Lochscheibe in den Punkten A und B in Bild 7e beträgt ungefähr das dreifache der angelegten Spannung. Die belastungsgerechte Faserverdichtung im Punkt A wird durch den Isothermenverlauf qualitativ korrekt wiedergegeben.

An dieser Stelle soll nochmals auf den Transportcharakter der Fourierschen Wärmeleitungsgleichung im Bild 7d bzw. auf die Gleichungen (14) und (15) hingewiesen werden. Die Vorgabe einer linearen Temperaturverteilung auf der Strecke P3P2 wird längs ihrer Charakteristiken ohne Diffusionseffekte transportiert, wobei die Charakteristiken der Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$, d.h. dem vom Anwender vorgegebenen Richtungsfeld genügen.

3.2 Beispiel 2: Der Einfluss von Singularitäten auf den Verlauf der Isothermen

Bei den Spannungssingularitäten werden folgende Unterscheidungen gemacht. Ein isotroper (oder neutraler) Punkt mit unbestimmter HS-Richtung tritt auf, wenn die beiden Hauptspannungen σ_1 und σ_2 identisch sind. Sind beide Hauptspannungen null, so liegt eine klassische Singularität vor. Punkte mit konzentrierten Lasten sind weder das eine noch das andere, ihre Isoklinen konvergieren jedoch im Punkt der Krafteinleitung, ähnlich wie bei einem isotropen Punkt. Es stellt sich dann die Frage, wie die Isothermen (= Spannungstrajektorien) in der Nähe dieser Punkte verlaufen? Dieser Fall kann am Beispiel einer Ringscheibe unter diametralen Einzelkräften studiert werden. Bild 8a zeigt den Verlauf der Isoklinen und Spannungstrajektorien, die in [15] durch spannungsoptische Methoden ermittelt wurden.

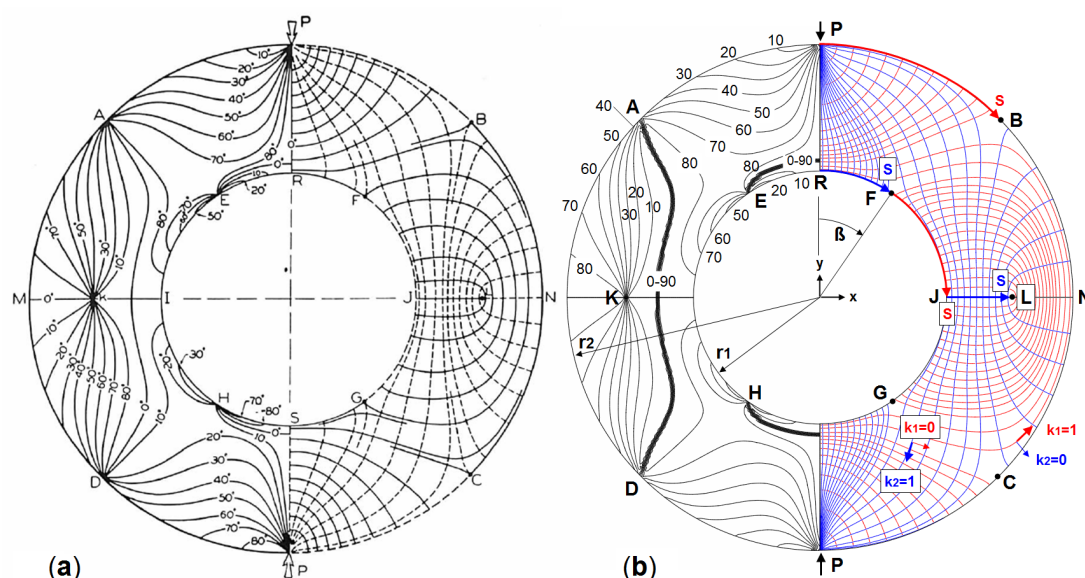


Bild 8. Ringscheibe unter diametralen Einzelkräften, $r_2/r_1=2$: (a) Spannungsoptische Isoklinen (links) und Trajektorien (rechts) nach [15]; (b) Verifikation mit ABAQUS, Isoklinen (links), σ_1 -Trajektorien (rechts) und σ_2 -Trajektorien (links).

niert, so wird nur ein Teil der Struktur mit Isothermen erfasst. Es muss dann noch ein weiteres Randsegment mit Temperaturrandbedingungen beaufschlagt werden, um den Rest der Struktur zu erfassen. In Bild 8b ist dies die Strecke JL. Bei der Berechnung der σ_1 -Trajektorien in Bild 8b wird analog vorgegangen. Die Temperatur wird längs PB linear ansteigend definiert mit Fortsetzung längs LN.

Das Ziel, streng gleichförmig verteilte Isothermen (Trajektorien) zu berechnen, kann nur gebietsweise erreicht werden. Bild 9a zeigt definitionsgemäß gleichförmig verteilte σ_1 -Trajektorien längs PB, diese enden jedoch ungleichförmig verteilt auf dem Rand PR.

Bei der Lochscheibe (Bild 7) tritt der oben erwähnte Trajektorienwechsel längs des rechten Rands P2P3 nicht auf. Dieser Rand ist frei von Singularitäten. Es genügt die Vorgabe von zwei Temperaturen in den Punkten P2 und P3. Man kann diese einfache 2-Knoten-Randbedingung (Kap. 2.3) generell für alle 2D-Scheiben und 3D-Schalen anwenden und erhält dann, je nach Anzahl der Singularitäten, entsprechend gewichtete Isothermenverteilungen. Bild 9b zeigt diese einfache Vorgehensweise für die Ringscheibe mit ihren Singularitäten. Die dort gezeigten Isothermen sind weniger gleichförmig verteilt als in Bild 9a, für eine schnelle Übersicht jedoch ausreichend.

Das Scheibenringproblem (Bild 8) beinhaltet die wichtigsten Formen von Singularitäten: isotrope Punkte vom abweisenden und einschließendem Typ, sowie konzentrierte Punktlasten, die sich wie isotrope Punkte verhalten. Fehler sind in der Darstellung der Isothermen unvermeidlich, da diese nicht auf die Singularität hin konvergieren. Vielmehr weichen die Isothermen dort in unmittelbarer Nähe seitlich aus, abhängig von der Netzfeinheit des Modells. Das Modell in Bild 8b im Vergleich zu Bild 8a ist offensichtlich fein genug, um diesen Fehler gering zu halten. Die Elementgröße ist praktisch überall gleich, längs JN wurden 60 Elemente (mit jeweils vier Knoten) verwendet. Durch weitere Netzverfeinerungen im Bereich der Singularitäten kann der Fehler beliebig klein gehalten werden.

3.3 Beispiel 3: Die Hauptspannungstrajektorien in Schalenstrukturen

In der Einleitung wurde ein herkömmliches Integrationsverfahren zur Berechnung von Hauptspannungstrajektorien in einer Schale gezeigt (Bild 1). Nachteile ergaben sich aus der ungleichförmigen Faserplatzierung, die sich aus der separaten Berechnung einer jeden Einzelfaser ergibt. Ausgehend von einem Startpunkt (Startelement) ist es praktisch nicht möglich, diese Startpositionen vorab so auszuwählen, dass gleichförmig verteilte Faserverläufe resultieren.

Im Gegensatz dazu steht die Integration mithilfe einer orthotropen Wärmeleitungsrechnung. Schon mit einer 2-Knoten-Temperaturrandbedingung ($Q_0: T=0^\circ\text{C}$, $Q_1: T=1^\circ\text{C}$) lassen sich deutlich gleichförmigere Faserverteilungen erreichen als dies in Bild 1a dargestellt ist. Diese in Bild 10a gezeigte Temperaturverteilung liefert die ungefähre Lage von drei lokalen Temperaturmaxima an den Positionen P_0 , P_1 und P_2 .

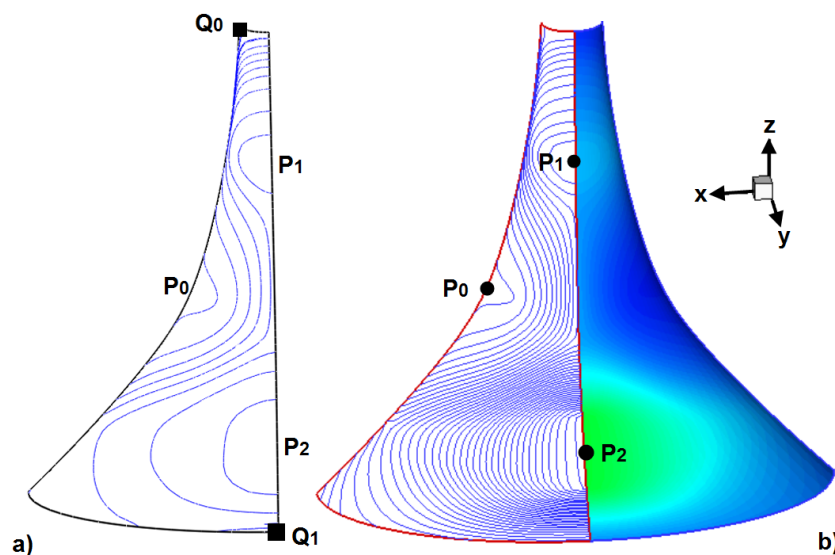


Bild 10. Schalenstruktur analog zu Bild 1: (a) Isothermen mit einer 2-Knoten-Temperaturrandbedingung; (b) Isothermen mit einer 3-Knoten-Temperaturrandbedingung, rechts: Temperaturfeld zur Extraktion beliebiger Isothermen (Fasern).

Durch eine weitere Wärmeleitungsberechnung mit einer entsprechenden 3-Knoten-Temperaturrandbedingung ($P_0: T=0^\circ\text{C}$, $P_1: T=1^\circ\text{C}$, $P_2: T=2^\circ\text{C}$, Bild 10b) wird die Gleichförmigkeit der Isothermenverteilung verbessert. Eine Spezifikation linear veränderlicher Temperaturrandbedingungen analog zum vorigen Kapitel würde eine weitere Verbesserung erbringen, erscheint aber angesichts des Ergebnisses in Bild 10b nicht unbedingt nötig.

Ändert sich die Anzahl der dazustellenden Integralkurven, so müssen bei der Visualisierung des Temperaturfeldes nur entsprechend mehr Isothermen geplottet werden. Die rechte Bildhälfte in 8b hebt diesen Aspekt besonders hervor: Das kontinuierliche Temperaturfeld ist bezüglich der Isothermen unendlich dicht.

3.4 Optimierung der Faserplatzierung in FKV-Konstruktionen

Um über die Visualisierung von Tensorlinien hinaus eine wichtige Anwendung aufzuzeigen, wurde in der Einleitung auf die Faserplatzierung in FKV-Konstruktionen hingewiesen. Faserverläufe, die den lokalen HS-Richtungen folgen, nützen die überragenden Steifigkeits- und Festigkeitseigenschaften der Fasern aus und resultieren in variabel geführten Kreuzverbunden. Im Hinblick auf Optimalität ist jedoch auf die Vorzeichen der Hauptspannungen zu achten.

Die Faserplatzierung in Richtung der Hauptspannungen ist nach der Netztheorie optimal [16]. Dabei wird das Mittragen der Matrix vernachlässigt, es trägt nur das Fasernetzwerk. Damit liegt man auf der sicheren Seite, mithilfe eines Faserbruchkriteriums lässt sich die Tragfähigkeit der Konstruktion berechnen. Eine Auslegung auf Faserzwischenbruch muss den Einfluss der Matrix zusätzlich berücksichtigen. Der variable Kreuzverbund, der der lokalen σ_1 - und σ_2 -Richtung folgt, ist weiterhin optimal, jedoch nur in Gebieten mit Hauptspannungen unterschiedlichen Vorzeichens. Ist das Vorzeichen jedoch gleich, ist nach der klassischen Laminatstheorie (CLT) der ausgeglichene Winkelverbund die bessere Wahl [17]. Dieser Verbund unterscheidet sich vom (rechtwinkligen) Kreuzverbund durch einen Korrekturwinkel $\pm\beta$ bezüglich der σ_1 -Richtung. Das Richtungsfeld y' für die größte Hauptspannung σ_1 ist dann durch zwei Richtungsfelder repräsentiert: $y'+\beta$ und $y'-\beta$, Bild 11.

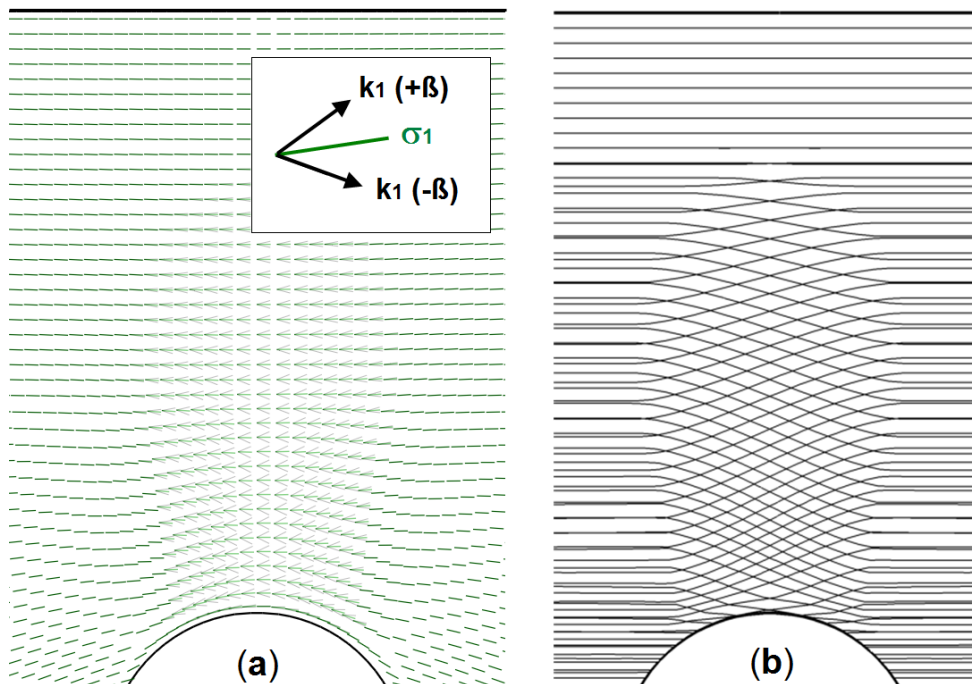


Bild 11. Lochscheibe (Detail) analog Bild 7e, in Gebieten mit gleichem Vorzeichen der Hauptspannungen ist der ausgeglichene Winkelverbund optimal: (a) Korrekturwinkel $\pm\beta$ bezüglich der σ_1 -Richtung; (b) Integration des modifizierten Richtungsfelds.

Beispielsweise enthält die Lochscheibe (Bild 7e) Bereiche $\sigma_1 \cdot \sigma_2 < 0$ (Kreuzverbund ist optimal) und $\sigma_1 \cdot \sigma_2 > 0$ (Winkelverbund ist optimal). Die so modifizierten Richtungsfelder lassen sich weiterhin ohne Einschränkung mithilfe der orthotropen Wärmeleitungsberechnung integrieren. Der Korrekturwinkel β ist abhängig vom Material und dem Hauptspannungsverhältnis σ_1/σ_2 [17]. Mit diesem Hinweis soll betont werden, dass die orthotrope Wärmeleitung für die Integration beliebiger Richtungsfelder geeignet ist, auch wenn diese aus ingenieurmäßigen Gründen modifiziert werden. Für weitere Details und besondere Aspekte einer belastungsgerechten Optimierung (Schichtdickenverteilung, Lastfallspektrum, Nichtlinearität der Spannungsverteilung über die Schalendicke) wird auf [1, 18] verwiesen.

4. Diskussion

Das vorgestellte Verfahren ist geeignet, beliebige vektorielle und tensorielle 2D-Richtungsfelder mithilfe kommerzieller FE-Programme zu integrieren, sofern die FE-Programme Optionen zur Analyse orthotroper Wärmeleitung haben. Die damit berechneten Isothermen repräsentieren die Integralkurven dieser Richtungsfelder im Inneren und auf dem Rand der 2D-Struktur (Scheibe bzw. Schale). Die Vorgehensweise stützt sich auf 6 Regeln (Kap. 3), die nur den Standard Input des FE-Programms betreffen, an keiner Stelle ist zusätzlicher Programmieraufwand nötig. Als Minimum an thermischen Randbedingungen sind zwei Temperaturen an zwei unterschiedlichen Positionen vorzugeben. Die daraus sich ergebenden Isothermen können jedoch ungleichförmig verlaufen. Die Gleichförmigkeit wird erreicht, indem linear veränderliche Temperaturen längs eines Randsegments vorgegeben werden (Bild 5a). Weist das Richtungsfeld bzw. die Differenzialgleichung $y' = f(x, y)$ Singularitäten auf dem Rand auf, so ist die Definition der Randbedingungen sorgfältig vorzunehmen (Bild 9a). Es muss vermieden werden, dass Temperaturfunktionen auf Rändern vorgegeben werden, die selbst Trakjetorien (Isothermen) darstellen, s. auch Kap. 2.2. Hilfreich ist in diesem Fall eine vorausgehende Visualisierung der Isokline, Gleichung (16) und/oder eine Approximationsrechnung mit der 2-Knoten-Temperaturrandbedingung. Die Genauigkeit der Integration ist durch die Netzfeinheit der Struktur bedingt, so wie diese bei herkömmlichen Integrationsverfahren von der numerischen Schrittweite abhängt.

Im Vergleich zu herkömmlichen Integrationsverfahren ergeben sich mit dem neuen Verfahren wesentliche Verbesserungen:

- Die Integration der Richtungsfelder kann mit Standard FE-Programmen ohne zusätzlichen Programmieraufwand stattfinden.
- Es können beliebig viele Tensorlinien (Isothermen) aus dem kontinuierlichen Temperaturfeld extrahiert werden.
- Die Vorzeichenwechsel der Tensor-Eigenwerte müssen bei herkömmlichen Integrationsverfahren beachtet werden, nicht dagegen bei der orthotropen Wärmeleitungsberechnung.
- Da das berechnete Temperaturfeld kontinuierlich ist, kann daraus eine wichtige Information abgeleitet werden: Die Dichte der Faserverläufe (Isothermen) ist ein Maß für das lokale Faservolumen. Diese Dichte ist proportional zum Temperaturgradienten, [1] (S. 96).
- Die Methode der orthotropen Wärmeleitung kann auf lineare und nichtlineare Spannungsprobleme angewandt werden, [1], (S. 74). Wird die Methode auf Hauptschubspannungen im plastischen Bereich angewandt, so lassen sich damit Gleitlinien (slip-lines) darstellen, [1], (S. 41-44).
- Beim Einsatz von Stahlarmierung berücksichtigt der Baustatiker die Trajektorien der Hauptzugspannung. Die HS-Linien liefern einen Designvorschlag für die Armierung, [1], (S. 78).

Sofern der Verlauf der Isothermen (Trajektorien) für die Faserplatzierung in FKV-Konstruktionen genutzt werden soll, müssen die visualisierten Isothermen positionsgerecht in Koordinaten umgerechnet werden. Als kommerzielle Lösung ist hierfür TECPLOT (Bellevue, WA, USA) geeignet (Bild 10), alternativ kann auch ein Fortranprogramm eingesetzt werden, der Source-Code ist in [19] enthalten.

Referenzen

1. Moldenhauer H., Die orthotrope Wärmeleitung als numerischer Integrator allgemeiner Richtungsfelder mit Anwendung zur optimalen Faserplatzierung und Kraftflussvisualisierung, Dr.-Ing. Dissertation, Karlsruher Institut für Technologie, September 2016, <https://publikationen.bibliothek.kit.edu/1000060087>.
2. Beyer, F.R. Hauptspannungstrajektorien in der numerischen Festkörpermechanik - Ein Algorithmus zur Visualisierung der Bauteilbeanspruchung in zwei und drei Dimensionen, Dr.-Ing. Dissertation, Technische Universität Dresden, März 2015, <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:14-qucosa-178497>
3. Delmarcelle, T. The Visualization of Second-Order Tensor Fields, PhD thesis, Stanford University, December 1994.
4. Delmarcelle, T.; Hesselink, L. The Topology of Second-Order Tensor Fields, Proceedings of the conference on Visualization, Washington, USA, 1994, pp. 140–148.
5. B. Jobard, B.; W. Lefer, W. Creating Evenly-Spaced Streamlines of Arbitrary Density, 8th Eurographics Workshop on Visualization in Scientific Computing, Boulogne-sur-Mer, France, April 1997; Springer Verlag, pp. 44-55.
6. Tricoche, X. Vector and Tensor Field Topology - Simplification, Tracking and Visualization, Dr. rer. nat. Dissertation, Universität Kaiserslauten, April 2002.
7. Hyer, M.W.; Charette, R.F. Use of Curvilinear Fiber Format in Composite Structure Design, *AIAA Journal* **1991**, 29, pp. 1011-1015.
8. Mattheck, C. *Design in Nature*, Springer: Berlin, Germany, 1998, ISBN 3 540 62937 5
9. Tosh, M.W.; Kelly, D.W. On the Design, Manufacture and Testing of Trajectorial Fibre Steering for Carbon Fibre Composite Laminates, *Composites Part A*, **2000**, 31, pp. 1047–1060.
10. Spickenheuer, A. Zur fertigungsgerechten Auslegung von Faser-Kunststoff-Verbundbauteilen für den extremen Leichtbau auf Basis des variabelaxialen Fadenablageverfahrens Tailored Fiber Placement, Technische Universität Dresden, Dr.-Ing. Dissertation, Juni 2014, <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:bsz:14-qucosa-147748>
11. Hahn, D.W.; Özişik M.N. Heat Conduction, 3rd ed.; John Wiley and Sons: Hoboken, NJ, USA, 2012, p. 625, ISBN 978-1-118-41128-5
12. Hoffman, J.D. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*, 2nd ed.; Marcel Dekker: New York, NY, USA, 2001; pp. 501-526, ISBN 0-8247-0443-6.
13. Riley, K.F.; Hobson, M.P.; Bence, S.J. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, 3rd ed.; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2006; pp. 675-706, ISBN 0-521-86153-5.
14. Pinchover, Y.; Rubinstein, J. *An Introduction to Partial Differential Equations*, 3rd ed.; Cambridge University Press: Cambridge, UK, 2005; pp. 23-36, ISBN 0-521-84886-5.
15. Frocht, M.M. *Photoelasticity*, John Wiley and Sons: New York, NY, USA, 1946; Volume I, pp. 209-210.
16. Schürmann, H. *Konstruieren mit Faser-Kunststoff-Verbunden*, 2nd. ed., Springer: Berlin, Germany, 2007, pp. 451-476, ISBN 978-3-540-72189-5.
17. Michaeli, W.; Huybrechts, D.; Wegener, M. *Dimensionieren mit Faserverbundkunststoffen*, Hanser: Munich, Germany, 1994; pp. 107-119, ISBN 3-446-17659-4.
18. Moldenhauer, H. Beanspruchungsgerechte Faserplatzierung in Faser-Kunststoff-Verbunden, *Konstruktion* **2017**, 69, pp. 68-74.
19. DeVries, P.L. *Computerphysik*, Spektrum Akademischer Verlag: Heidelberg, Germany, 1994, pp. 417-420, ISBN 3-86025-336-0.