

KONTAKT UND INKOMPRESSIBILITÄT BEI LINEAREN UND QUADRATISCHEN ELEMENTEN

HANAU, 05.12.2018

MARTIN HERRMANN & DANIEL VALLICOTTI

cenit

// SYN
OPT
A CENIT COMPANY





AGENDA

► ELEMENTVERHALTEN BEI HYPERELASTIZITÄT

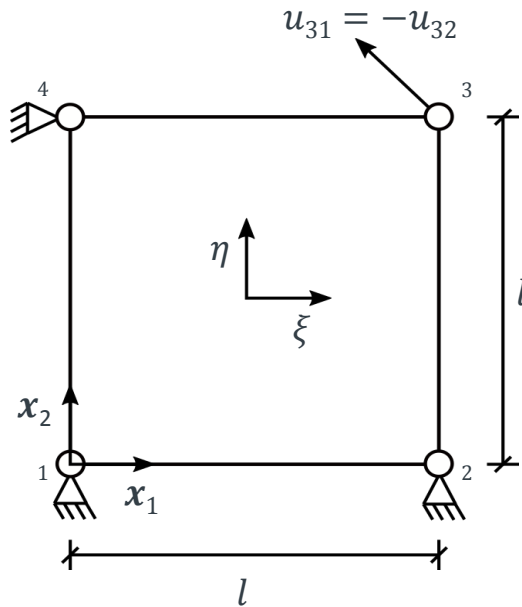
- Theoretische Untersuchung
- Praktische Anwendung
- Vergleich Standard/Explicit

► ELEMENTVERHALTEN IM KONTAKT

- Patchtest
- Gabel-Welle-Gelenk

ELEMENTVERHALTEN BEI HYPERELASTIZITÄT

Theoretische Untersuchung und praktische Problemstellung



Bilineares Verschiebungselement

Elementverschiebung wird berechnet durch

$$u_1 = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_{i1} = \frac{1}{4} (1 + \xi + \eta + \xi\eta) u_{31}$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) u_{i2} = \frac{1}{4} (1 + \xi + \eta + \xi\eta) u_{32}$$

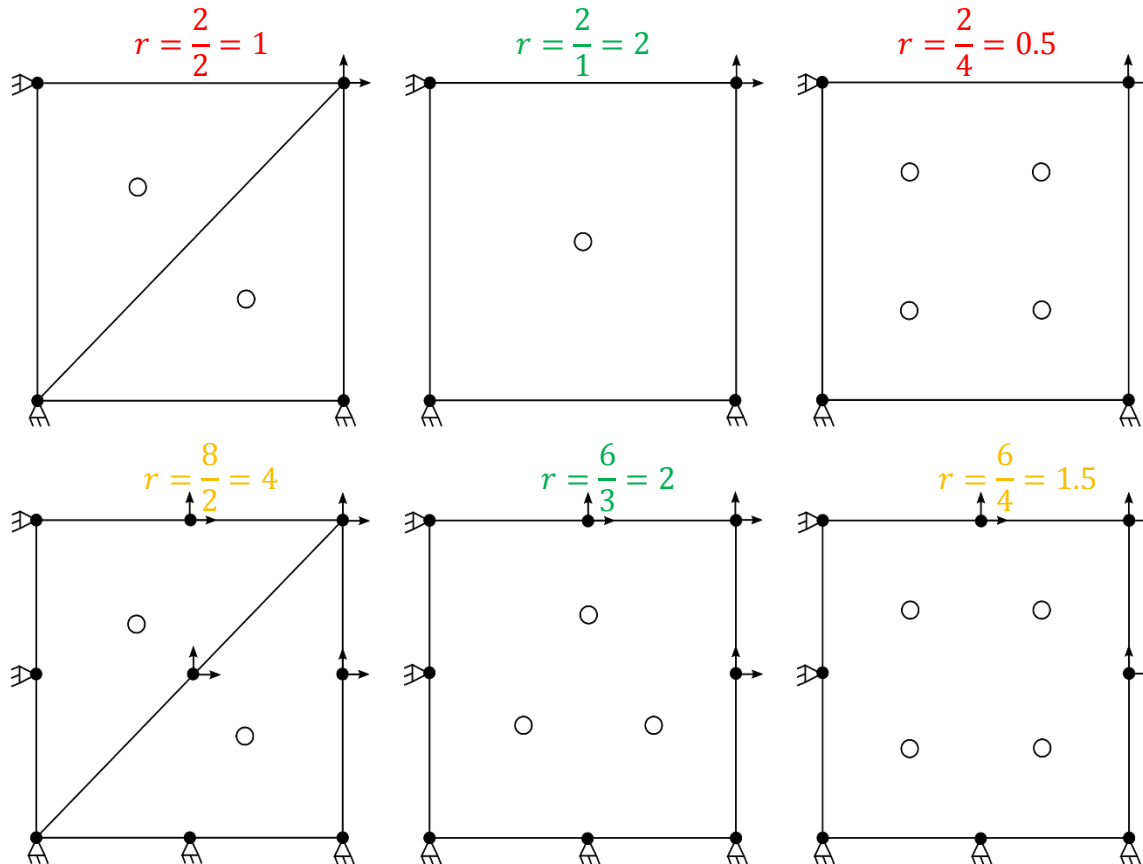
Bedingung für Inkompressibilität:

$$\text{Div}(\mathbf{u}) = u_{1,1} + u_{2,2} + u_{3,3} = 0$$

Mit $u_{31} = -u_{32}$ und $x_1 = \frac{1}{2}(1 + \xi)l$, $x_2 = \frac{1}{2}(1 + \eta)l$

$$u_{1,1} = \frac{1}{4l} u_{31} + \frac{1}{4l} \eta u_{31} \quad u_{2,2} = -\frac{1}{4l} u_{31} + \frac{1}{4l} \xi u_{31}$$

$$\text{Div}(\mathbf{u}) = (\eta - \xi) \frac{u_{31}}{2l} = 0 \quad \forall \{\xi, \eta | \xi, \eta \in [-1, 1]\} \rightarrow u_{31} = 0$$



● Verschiebungsknoten

○ Druckknoten

Zwangsverhältnis:

$r > 2$ zu wenig n_{ic}

$r = 2$ optimal

$r < 2$ zu viele n_{ic}

$r \leq 1$ locking

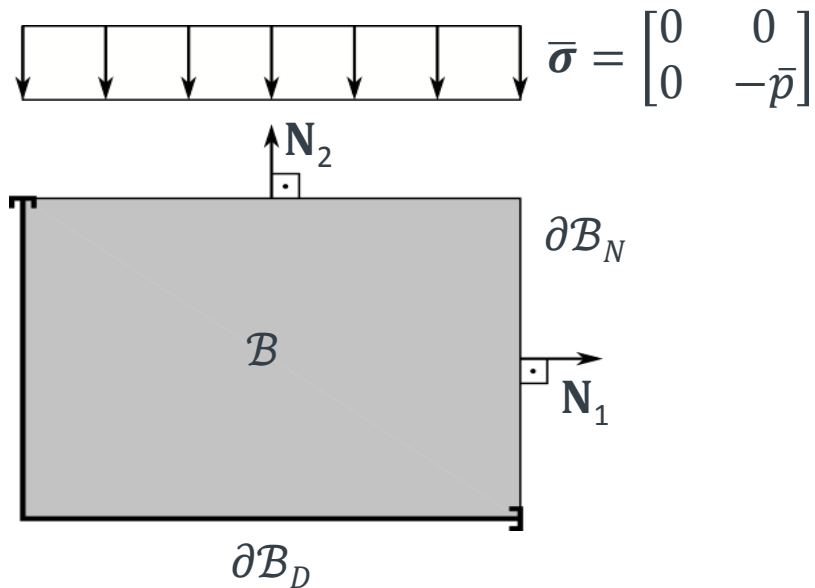
Element Zwangsverhältnis:

$$r = \frac{n_{eq}}{n_{ic}}$$

$n_{eq} :=$ Anzahl der Verschiebungsfreiheitsgrade

$n_{ic} :=$ Anzahl der Inkompressibilitätsbedingungen

BEISPIEL 1: GELAGERTER BLOCK UNTER KONSTANTER DRUCKLAST



Randbedingungen:

Ebener Verzerrungszustand

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial B_D$$

$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{N} \quad \text{auf } \partial B_N$$

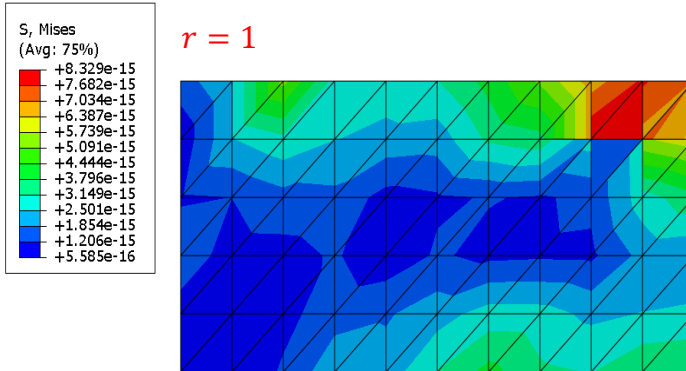
Materialeigenschaften: Hyperelastizität basierend auf einem generalisierten Mooney-Rivlin Material

$$\psi_{MR} = C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{D_1}(J - 1)^2$$

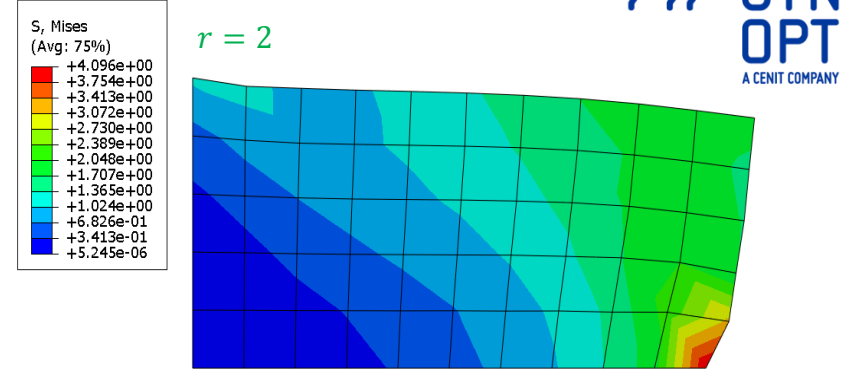
Inkompressibilität: Erreicht durch die Wahl $C_{01} = 0.1, C_{10} = 2, D_1 = 0$

BEISPIEL 1: GELAGERTER BLOCK UNTER KONSTANTER DRUCKLAST

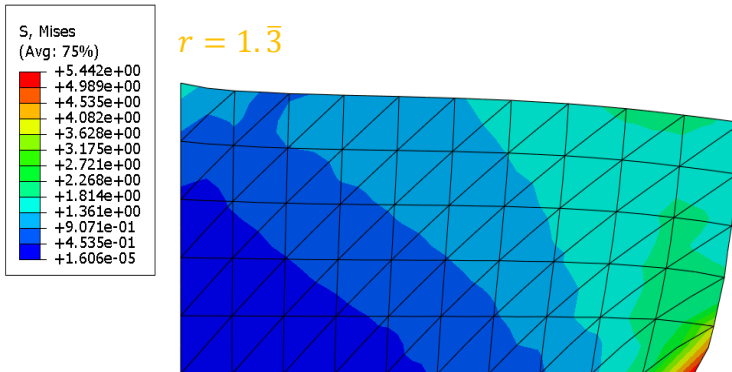
CPE3H: lineare Verschiebungen, konstanter Druck



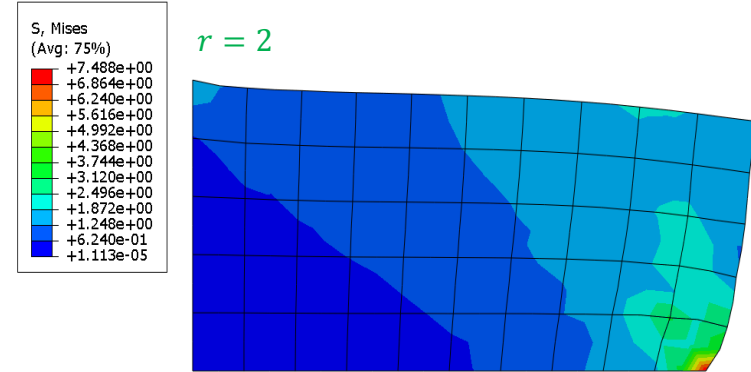
CPE4H: lineare Verschiebungen, konstanter Druck



CPE6H: quadratische Verschiebungen, linearer Druck



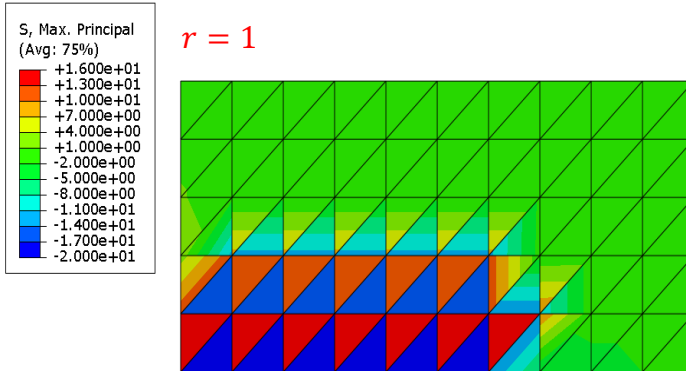
CPE8H: quadratische Verschiebungen, linearer Druck



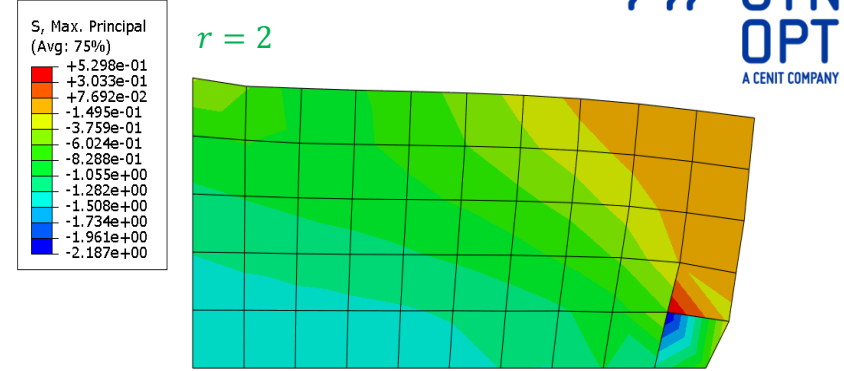
- Volumetrisches Locking der CPE3H Elemente führt zu unrealistischem Spannungsbild
- Viereckselemente CPE4H/8H und quadratische Dreieckselemente CPE6H erlauben inkompressible Deformationen durch kompatible Verschiebungsfreiheitsgrade

BEISPIEL 1: GELAGERTER BLOCK UNTER KONSTANTER DRUCKLAST

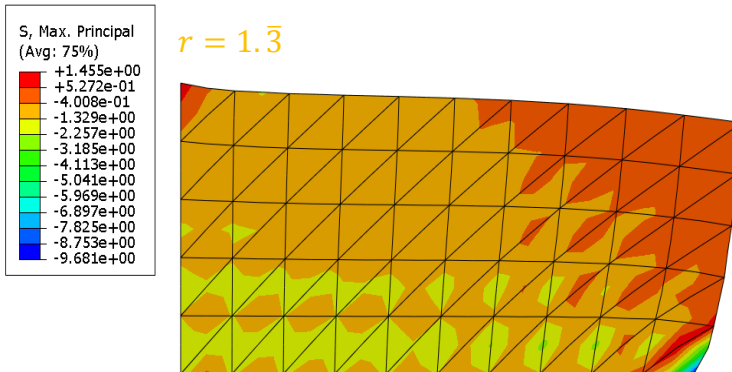
CPE3H: lineare Verschiebungen, konstanter Druck



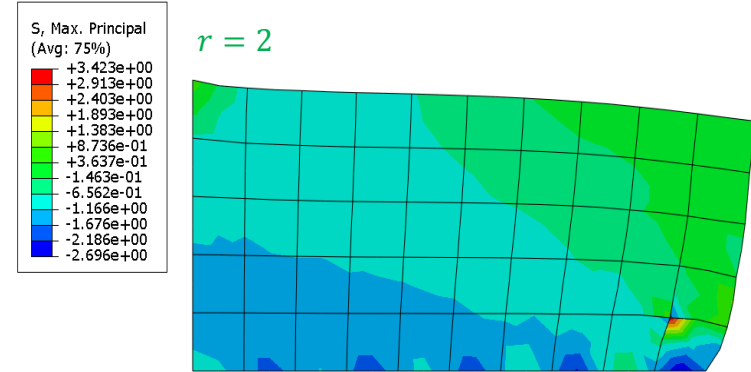
CPE4H: lineare Verschiebungen, konstanter Druck



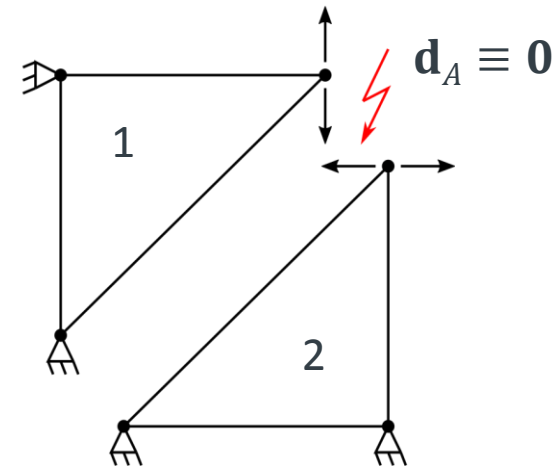
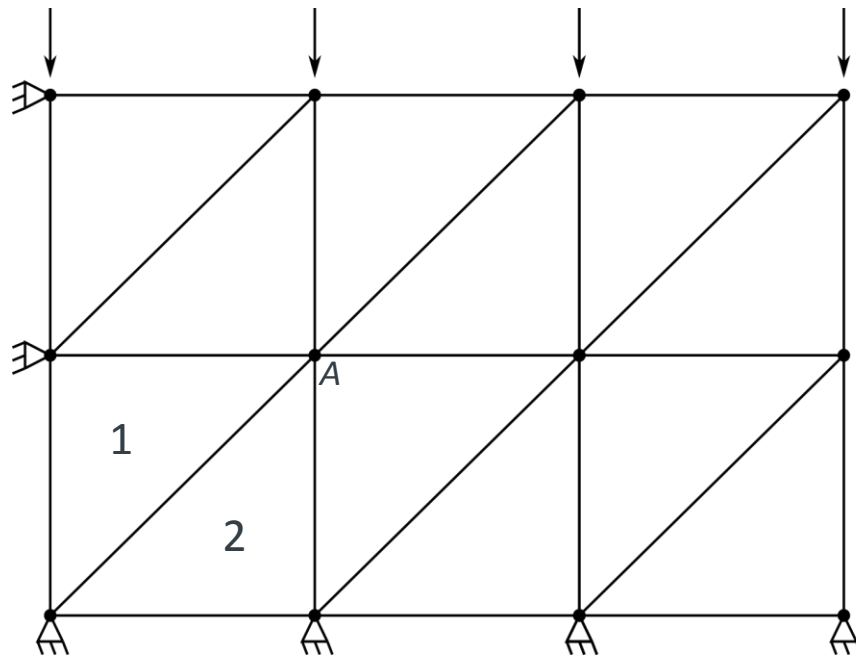
CPE6H: quadratische Verschiebungen, linearer Druck



CPE8H: quadratische Verschiebungen, linearer Druck

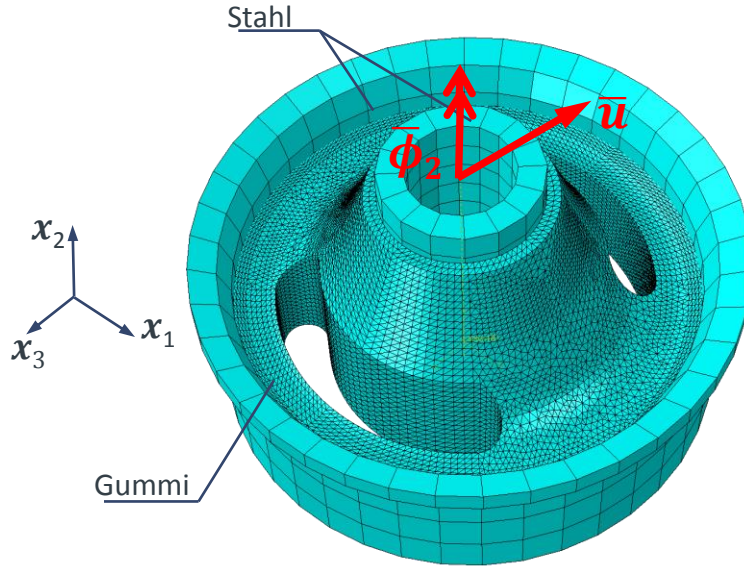


- Volumetrisches Locking der CPE3H Elemente führt zu unrealistischem Spannungsbild
- Viereckselemente CPE4H/8H und quadratische Dreieckselemente CPE6H erlauben inkompressible Deformationen durch kompatible Verschiebungsfreiheitsgrade



- Netzbedingtes Locking durch inkompatible Verschiebungsmöglichkeiten und Zwangsbedingungen am Rand, $\mathbf{u}^h \equiv 0$ in $\mathcal{B}^h$ und auf $\partial\mathcal{B}^h$
- Netzverfeinerung bringt keine Verbesserung
- Gemischte Elementformulierungen die die Babuška-Brezzi Stabilitätsbedingung erfüllen sind locking-frei → Theorie der abgestimmten Ansatzräume

BEISPIEL 2: DÄMPFUNGSSYSTEM UNTER KOMBINIRTER LAST



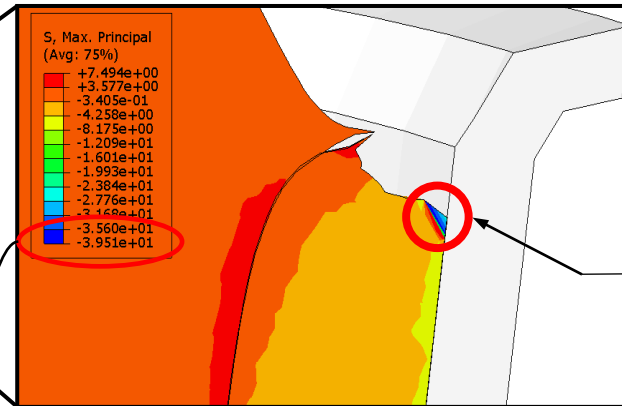
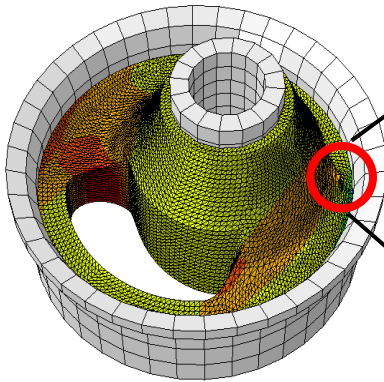
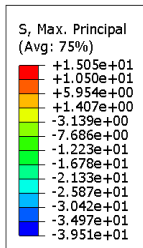
Materialparameter:

Stahl	$E = 200 \text{ GPa}$
	$\nu = 0.3$
	$\rho = 7.8 \text{ g/cm}^3$
Gummi	$C_{01} = 0.1$
	$C_{10} = 2$
	$D_1 = 0$
	$\rho = 1.1 \text{ g/cm}^3$

- Bauteil bestehend aus 2 Materialien
- Verschiebungsrandbedingungen am inneren Rohr $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} = 3\mathbf{x}_1 - 8\mathbf{x}_3$, sowie Rotationsbedingung $\boldsymbol{\phi} = \bar{\boldsymbol{\phi}} = 0.2\boldsymbol{\phi}_2$
- Symmetrierandbedingungen in der $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3$ Ebene

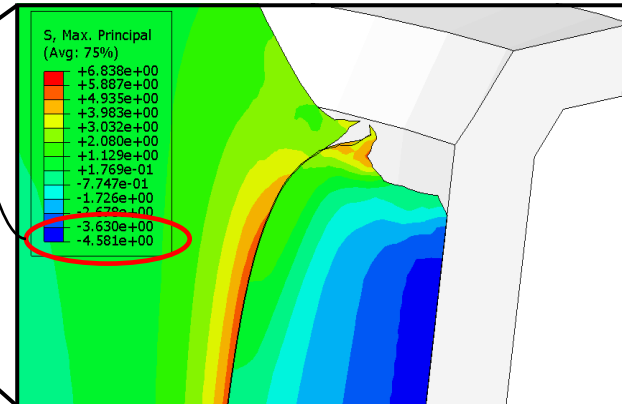
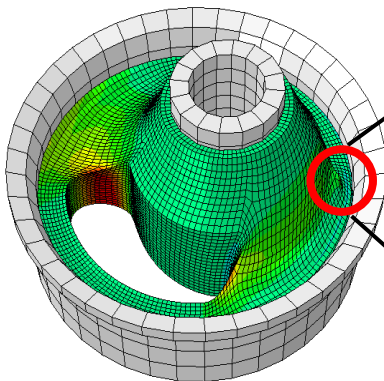
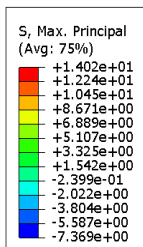
BEISPIEL 2: DÄMPFUNGSSYSTEM, ABAQUS STANDARD

C3D4H



Lokale Spannungsspitzen
→ Volumetrisches Locking

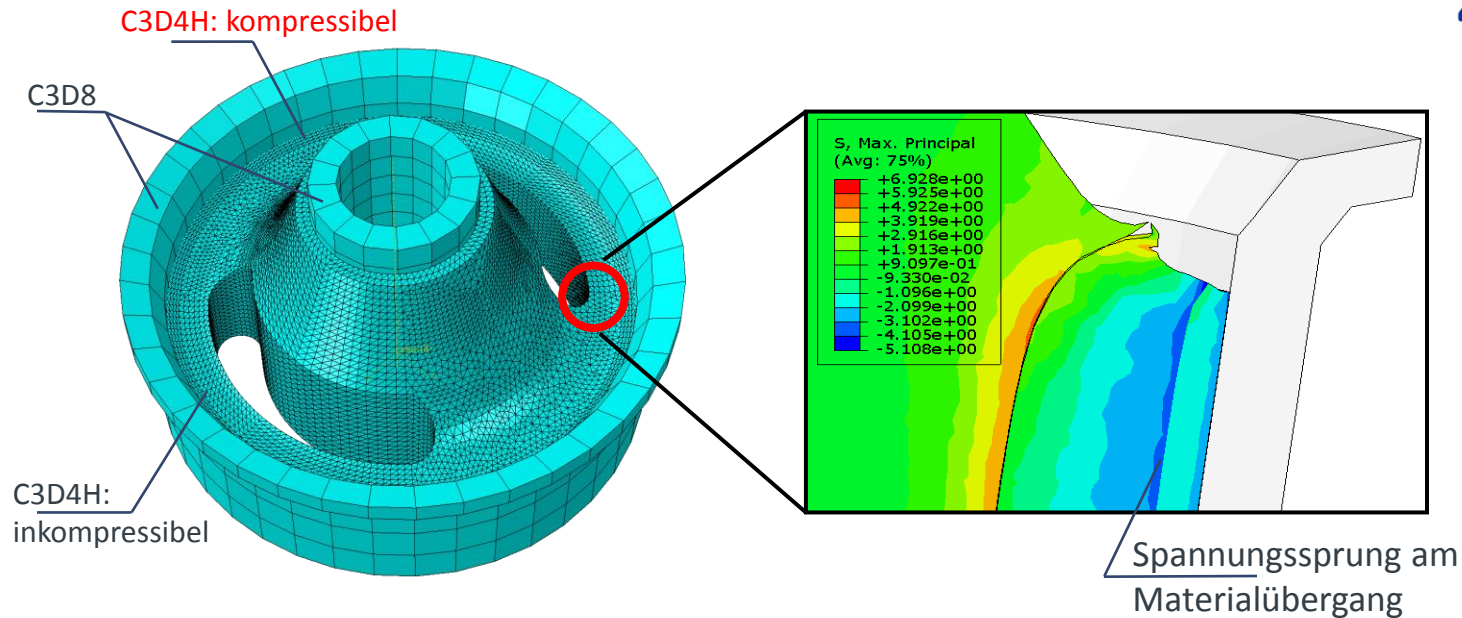
C3D8H



>800% höhere Druckspannungen

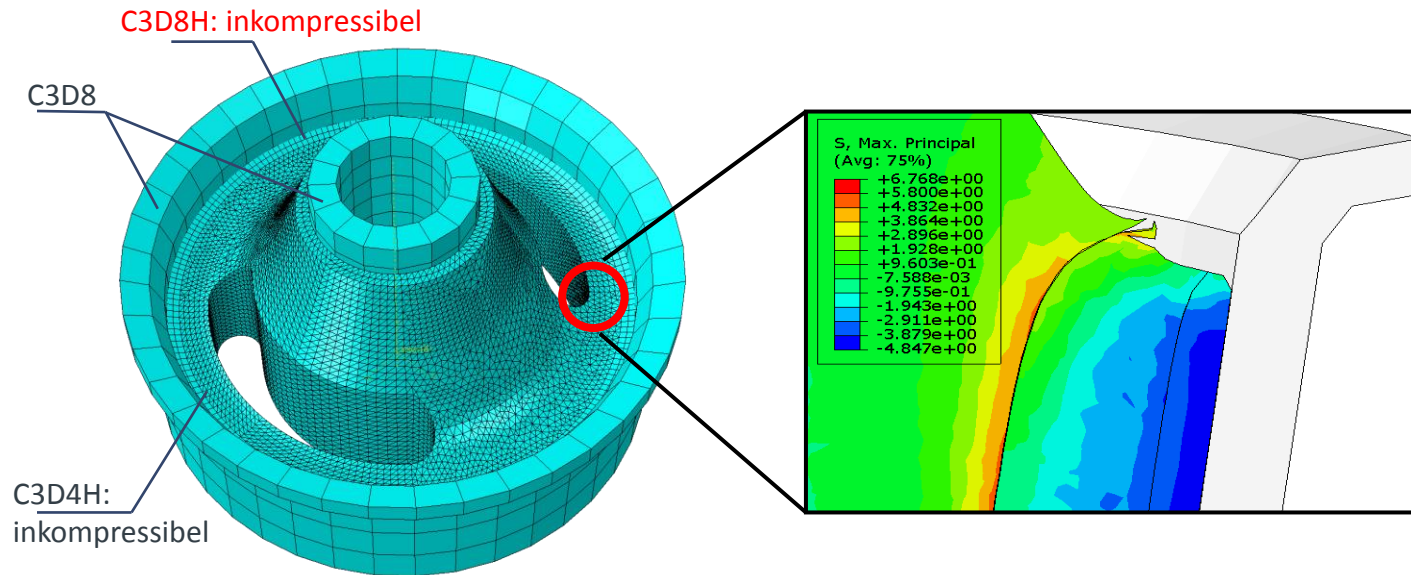
- Die Zwangsbedingungen am Rand führen im Fall der C3D4H Elemente zu lokalen Spannungsspitzen, die in der Auswertung beachtet werden müssen

BEISPIEL 2: „WORK-AROUNDS“ FÜR KOMPLEXE GEOMETRIEN



- Anschluss des inkompressiblen Materials an Umrandung durch dünne Schicht C3D4H mit (leicht) kompressiblem Materialverhalten
- Restliches Gummibauteil bleibt inkompressibel

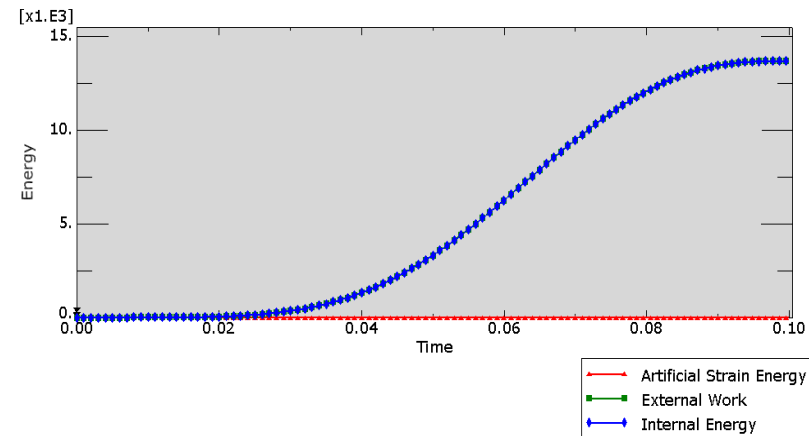
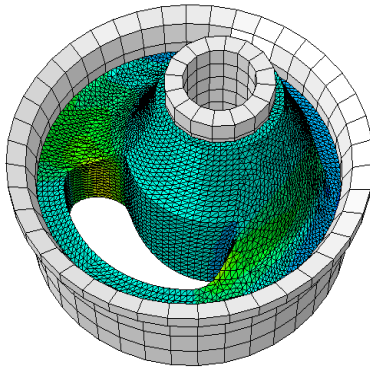
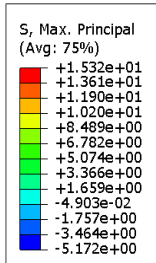
BEISPIEL 2: „WORK-AROUNDS“ FÜR KOMPLEXE GEOMETRIEN



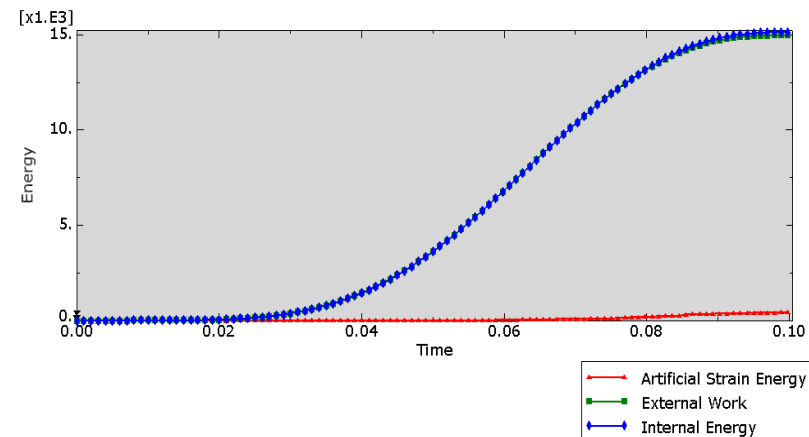
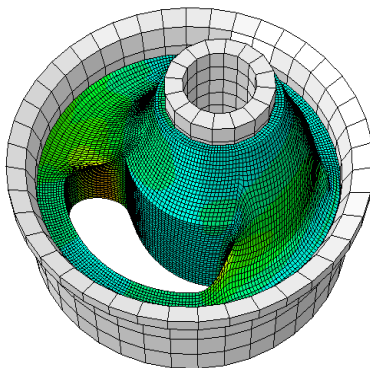
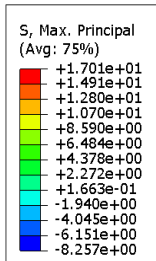
- Anschluss des inkompressiblen Materials an Umrandung durch dünne Schicht C3D8H
- Restliche Geometrie mit C3D4H vernetzt
- Inkompressibilität bleibt erhalten jedoch werden lokale, elementbedingte Spannungsspitzen reduziert

BEISPIEL 2: DÄMPFUNGSSYSTEM, ABAQUS EXPLICIT

C3D4



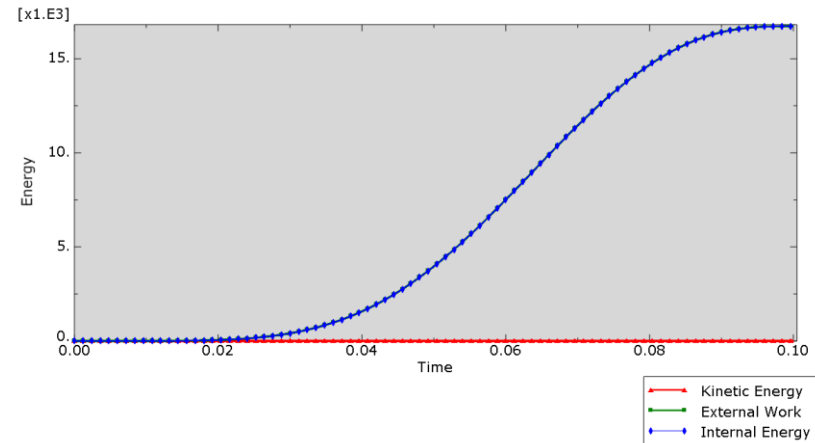
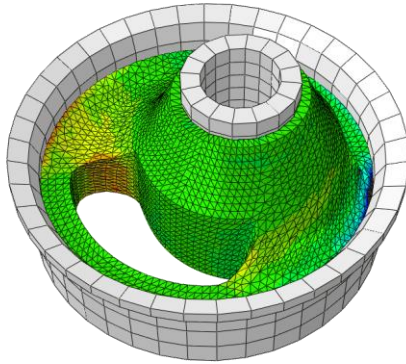
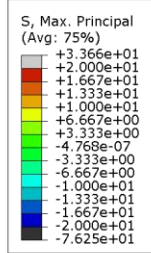
C3D8R



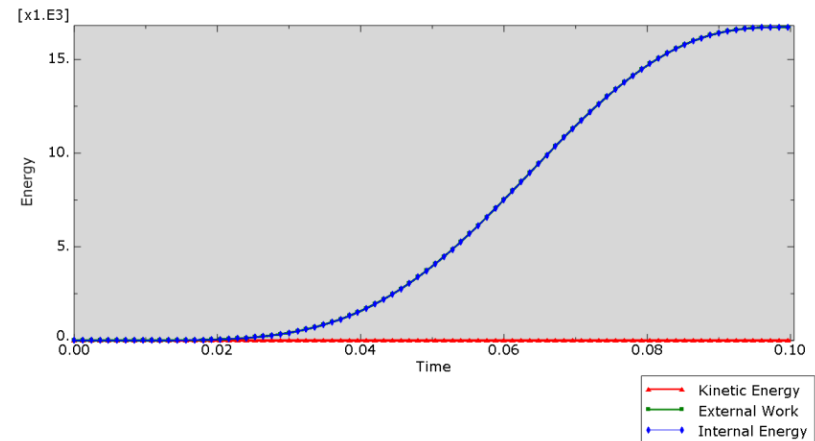
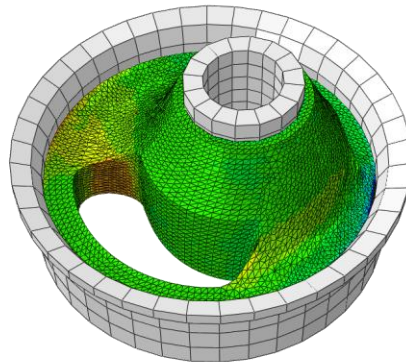
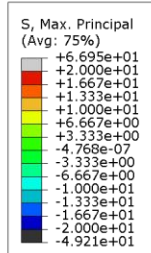
- Für Abaqus Explicit wird mit $\nu_{default} = 0.475$ die Inkompressibilität unterschätzt

BEISPIEL 2: DÄMPFUNGSSYSTEM, ABAQUS EXPLICIT

C3D4H



C3D4

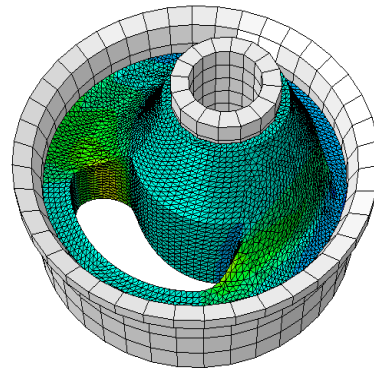
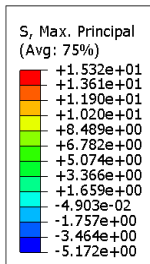


- In Abaqus Explicit werden mit $\nu = 0.485$ die Spannungen am Rand stark überschätzt

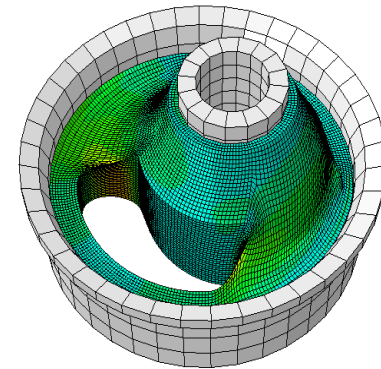
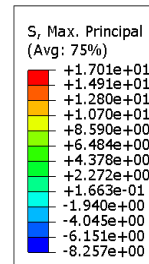
BEISPIEL 2: VERGLEICH ABAQUS STANDARD/EXPLICIT

Explicit

C3D4

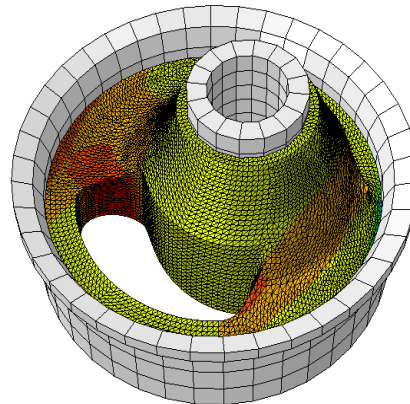
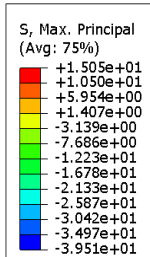


C3D8R

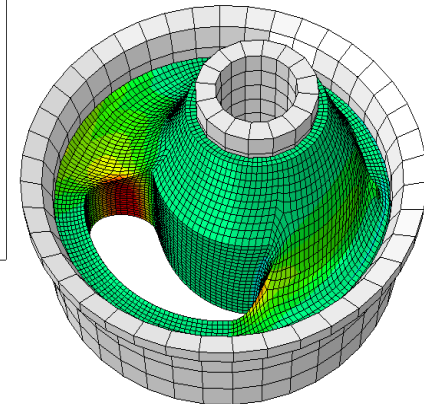
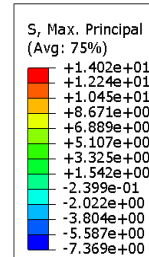


Standard

C3D4H



C3D8H



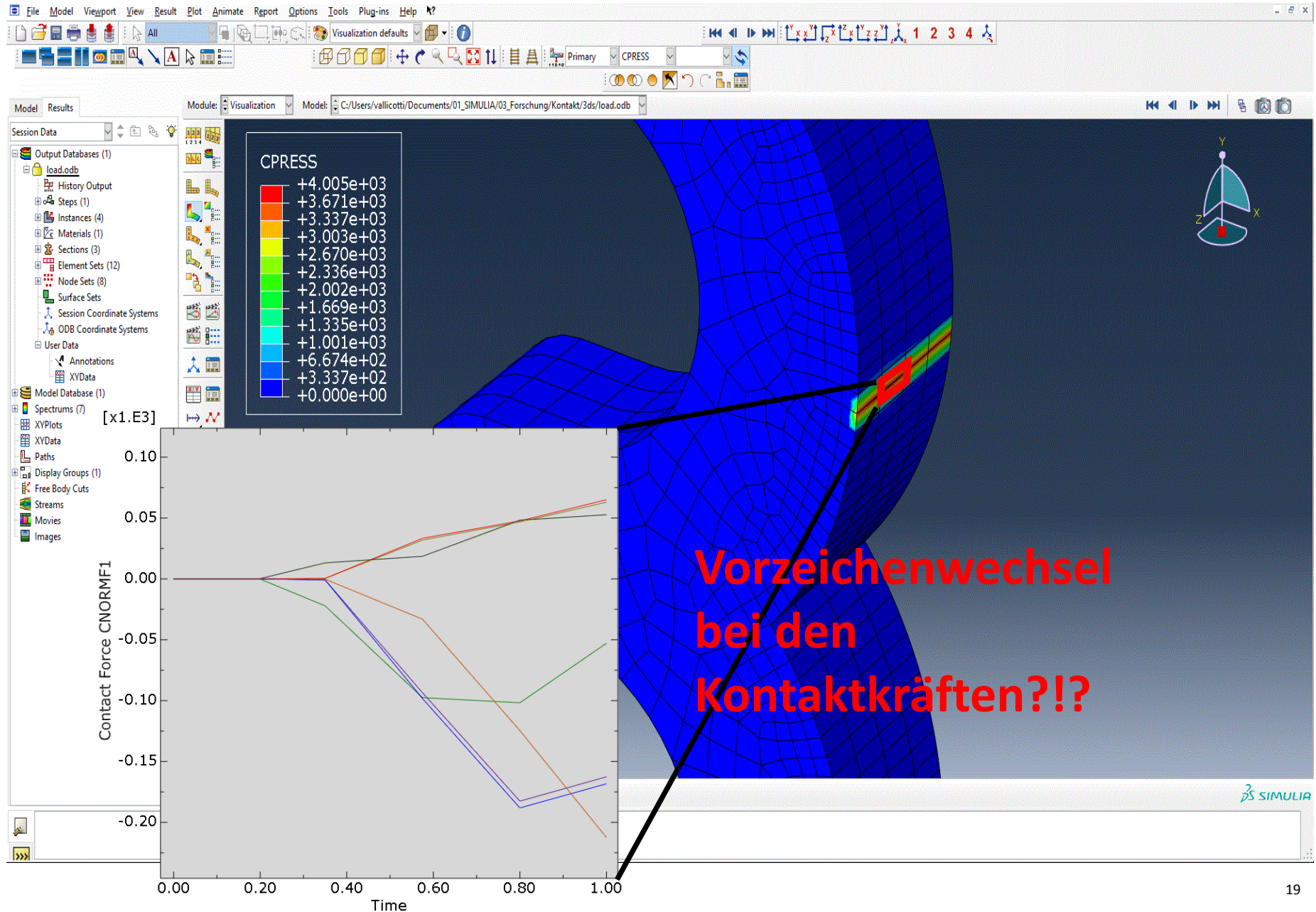
- Qualitativ sind die Ergebnisse von Abaqus Standard/Explicit vergleichbar
- An Rändern werden die Spannungsspitzen etwas unterschätzt

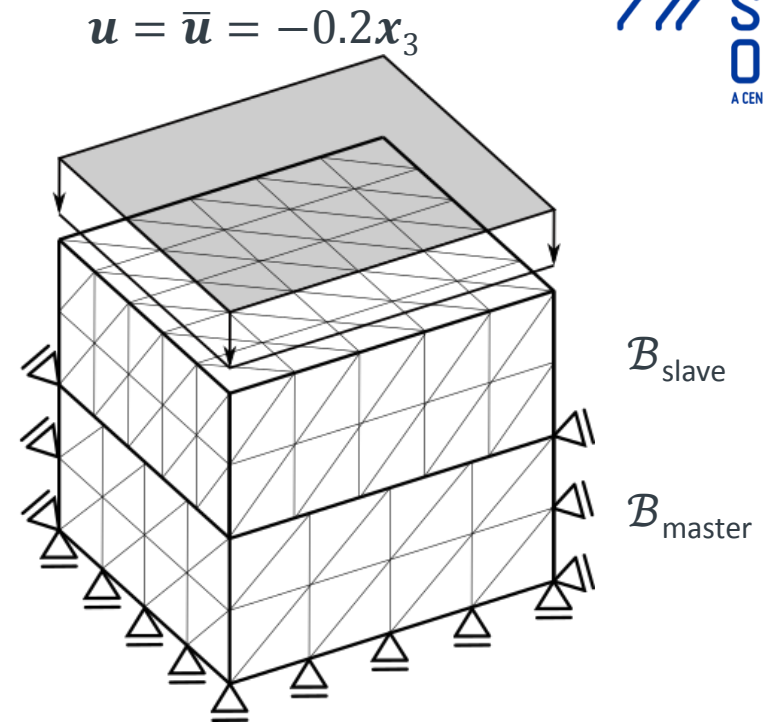
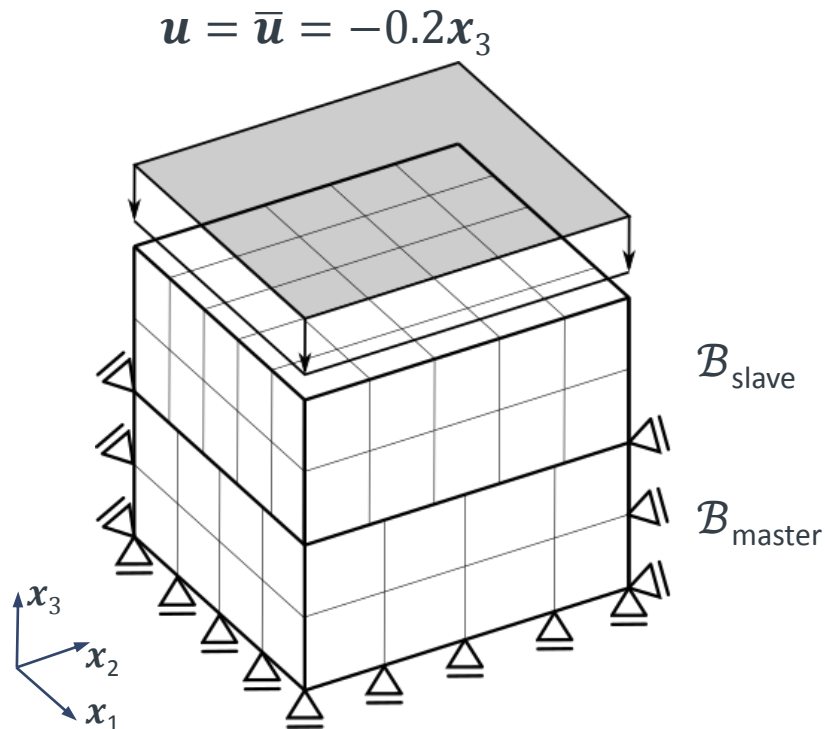
- Inkompressibilität führt vor allem im Zusammenhang mit zusätzlichen Zwangsbedingungen an Materialübergängen zu problematischen Spannungsspitzen
- Volumetrisches Locking lässt sich auf kinematisch inkompatible Verschiebungen und allgemein fehlende Freiheitsgrade zurückführen
- Die Qualität verschiedener gemischter Elementformulierungen lässt sich über ein Abzählkriterium abschätzen

Problem	Vorteilhafte Elementwahl	Vermeiden
Quasi Inkompressibilität ($0.5 > \nu > 0.475$)	Elemente erster Ordnung oder reduziert integrierte Elemente zweiter Ordnung	Vollintegrierte Elemente zweiter Ordnung
Strikte Inkompressibilität ($\nu = 0.5$)	Hybride Hexaeder Elemente (für große Deformationen Elemente erster Ordnung)	Vorsicht bei linearen Tetraedern unter Zwangsbedingungen

ELEMENTVERHALTEN IM KONTAKT

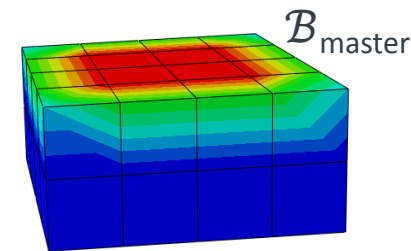
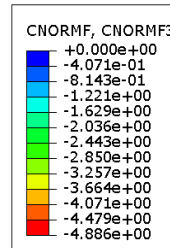
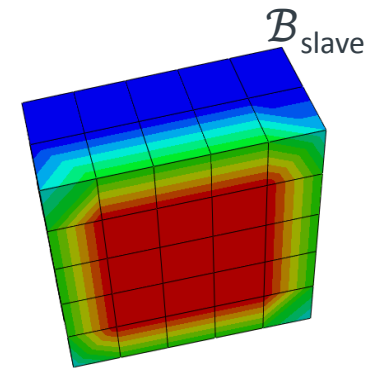
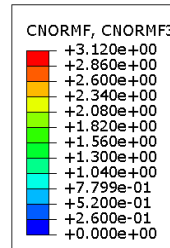
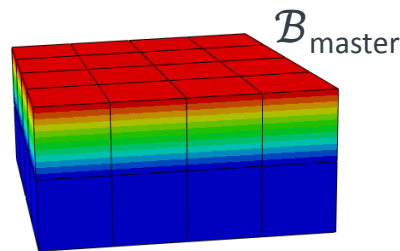
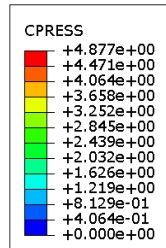
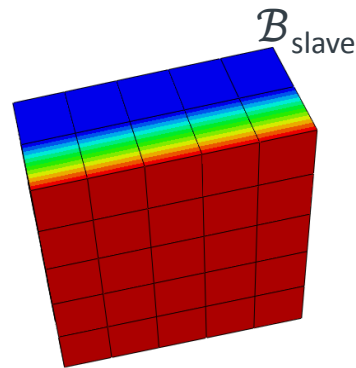
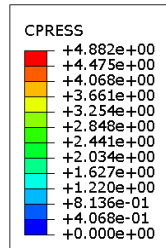
Von linearen Tetraedern zu modifizierten, quadratischen Hexaedern





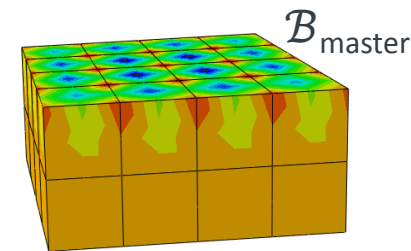
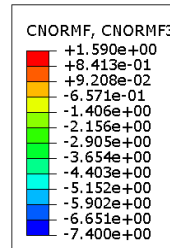
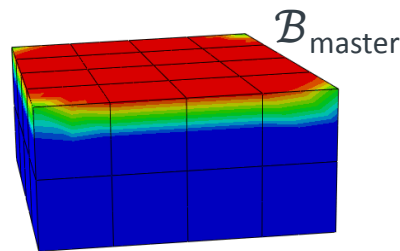
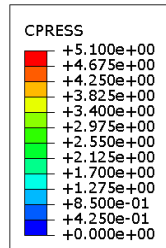
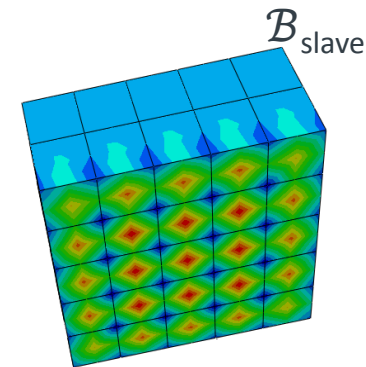
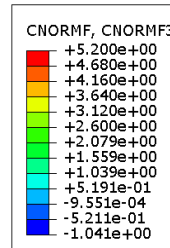
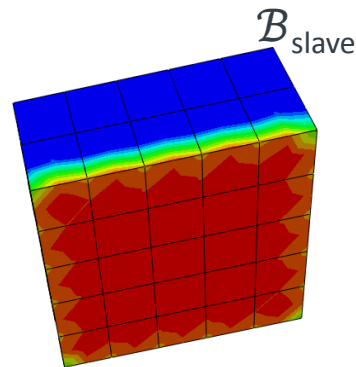
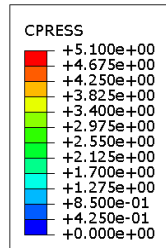
- Zwei rechteckige Körper mit identischen Materialeigenschaften stehen im direkten Verbund miteinander im Kontakt
- Die Körper sind mit Hexaeder- und Tetraeder-Elementen diskretisiert
- Als Dirichlet-Randbedingung wird in beiden Fällen eine konstante vertikale Verschiebung $u = \bar{u} = -0.2x_3$ auf den oberen Rand vorgegeben

C3D8

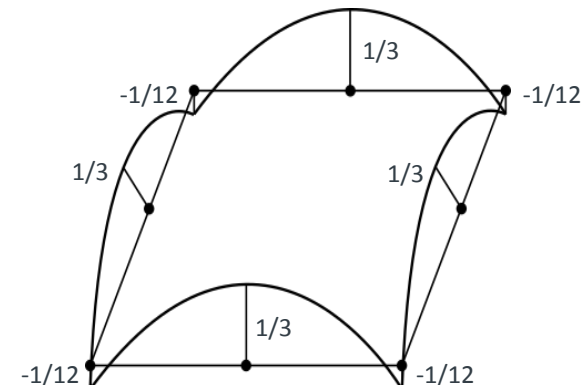


- Lineare Hexaeder-Elemente C3D8 zeigen einen konstanten Kontaktdruck c_{press} auf $\partial\mathcal{B}_C$
- Die Auswertung der konsistenten Knotenkräfte unterliegt der Einschränkung der Interpolationsvorschrift

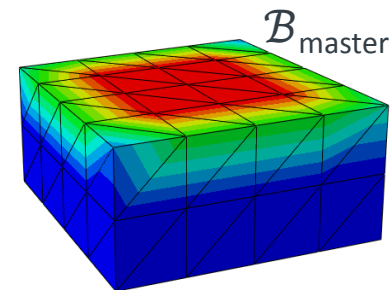
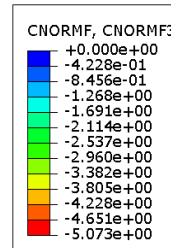
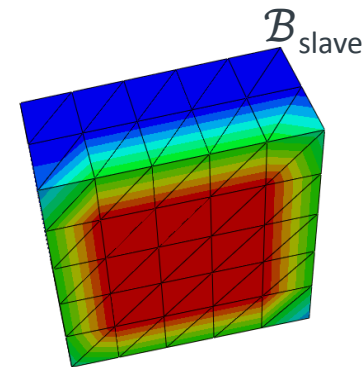
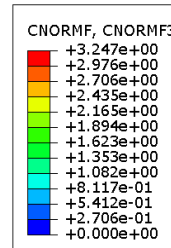
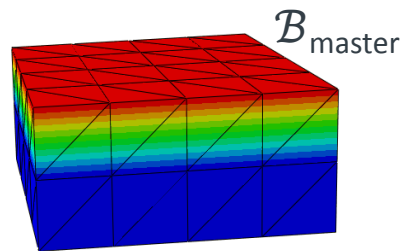
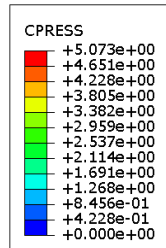
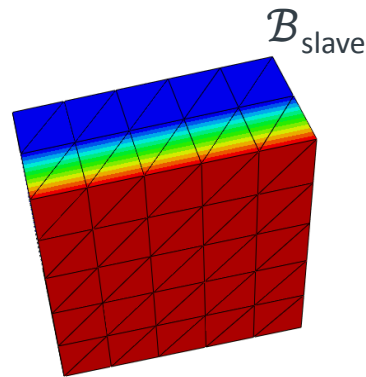
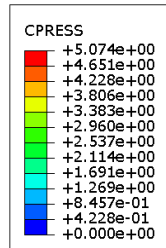
C3D20



- Quadratische Hexaeder-Elemente C3D20 ergeben oszillierende Kontaktdrücke
- Konsistente Knotenkräfte sind nicht aussagekräftig, da interpolationsbedingte Vorzeichenwechsel auftreten

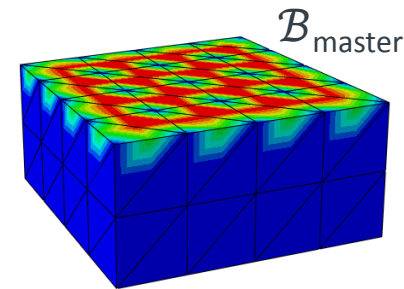
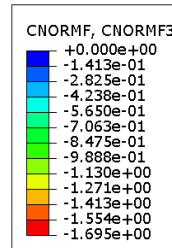
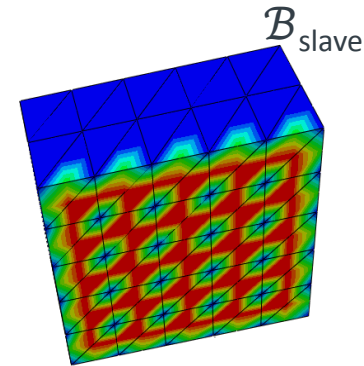
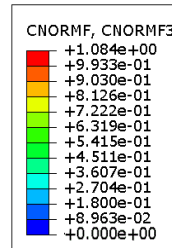
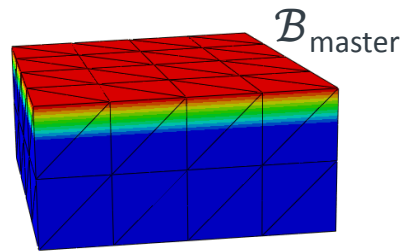
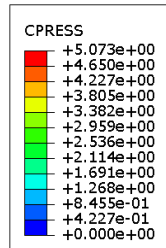
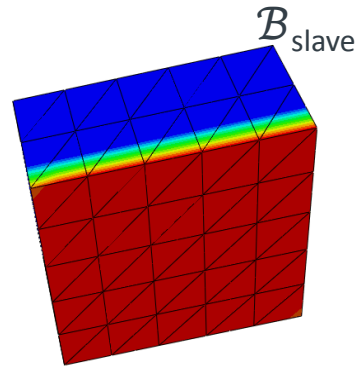
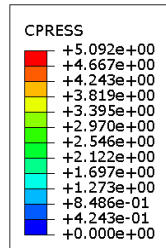


C3D4

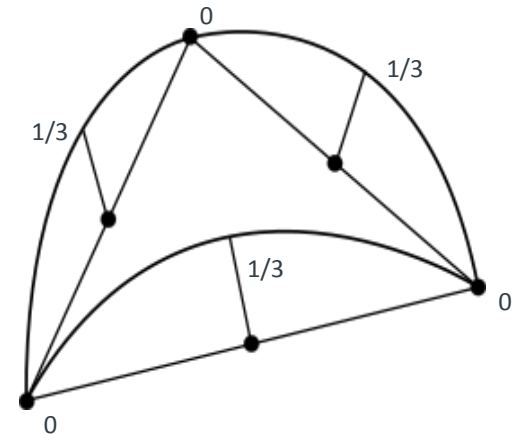


- Lineare Tetraeder-Elemente C3D4 ergeben einen konstanten Kontaktdruck c_{press} auf $\partial\mathcal{B}_C$
- Die Auswertung der konsistenten Knotenkräfte unterliegt der Einschränkung der Interpolationsvorschrift

C3D10

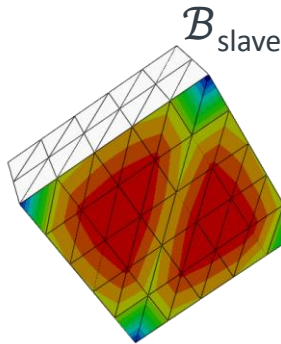
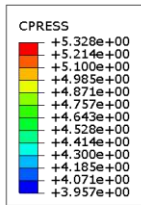


- Quadratische Tetraeder-Elemente C3D10 zeigen einen konstanten Kontaktdruck
- Die Auswertung der konsistenten Knotenkräfte zeigt Oszillationen

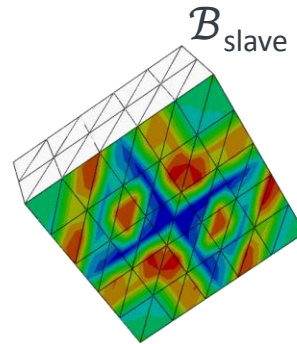
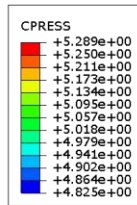


BEISPIEL 1.1: PENALTY NODE-TO-SURFACE CONTACT

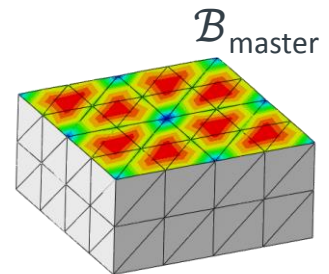
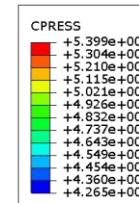
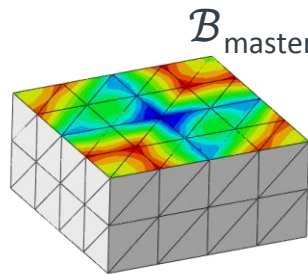
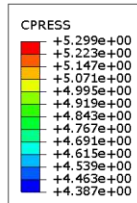
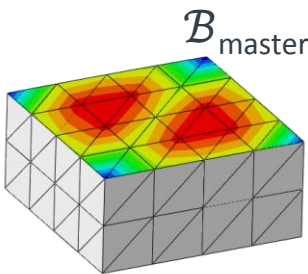
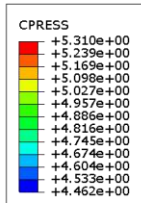
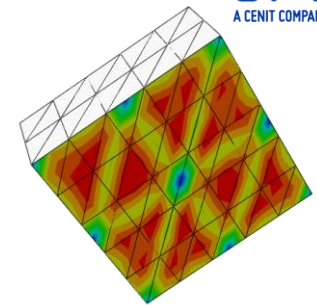
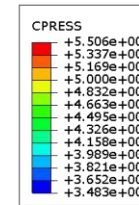
C3D4



C3D10



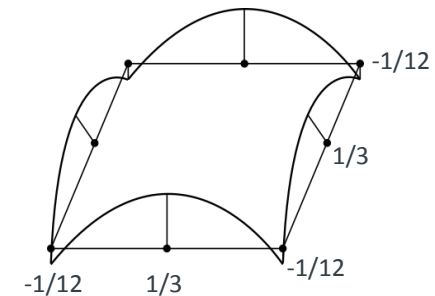
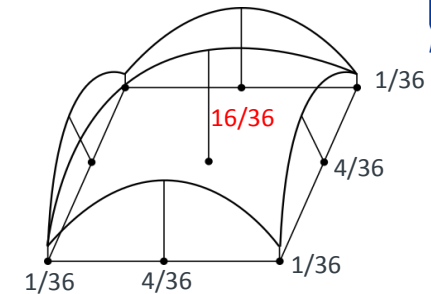
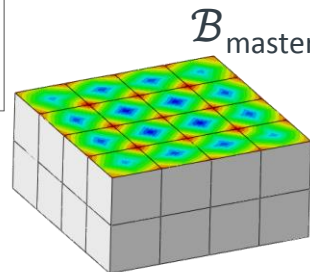
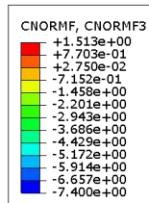
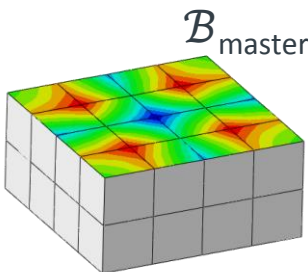
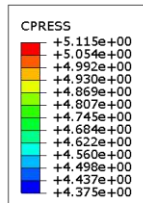
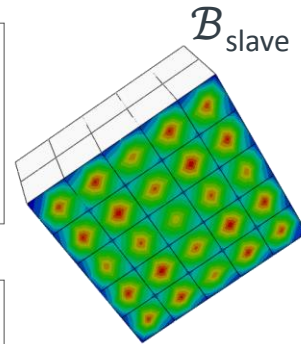
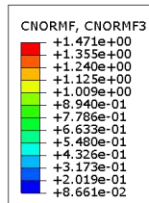
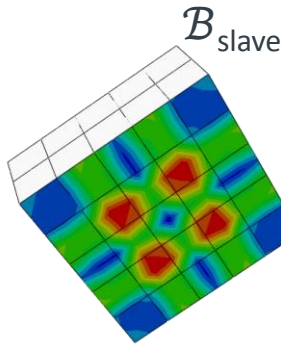
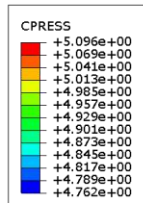
C3D10M



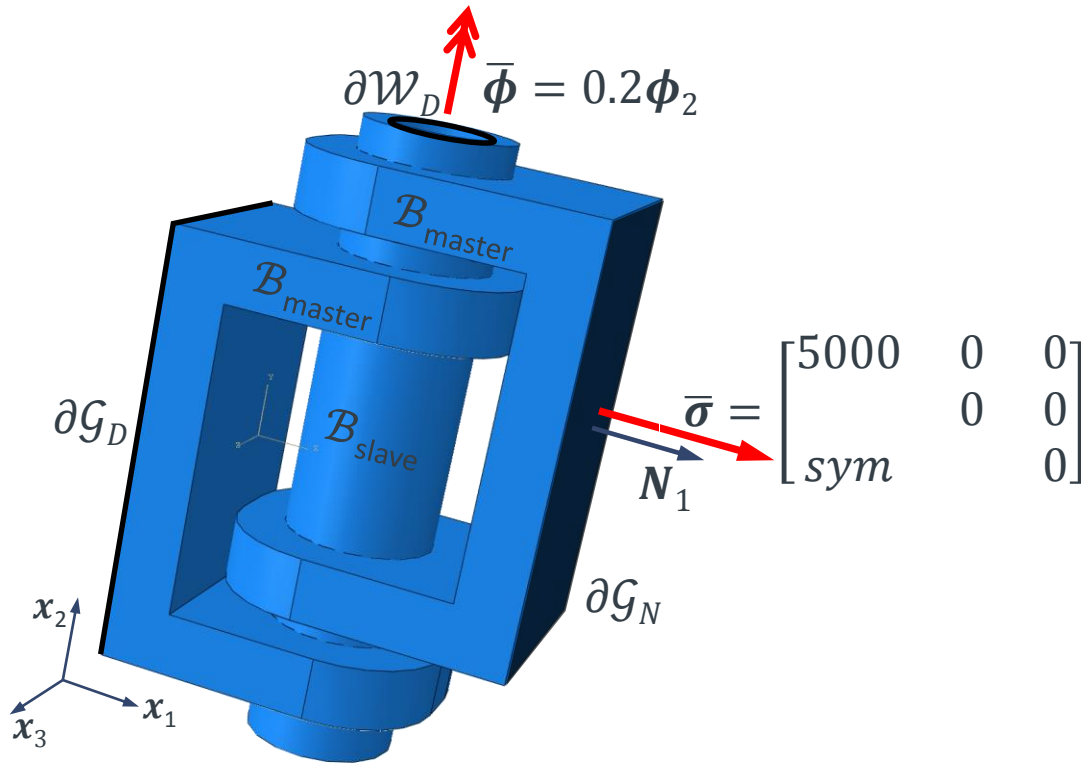
- Die Verwendung von gewöhnlichen quadratischen Tetraeder-Elementen C3D10 liefert im „node-to-surface contact“ ein relativ schlechtes Spannungsbild
- Sogar die modifizierten C3D10M Elemente zeigen Oszillationen im Spannungsbild
- Falls geometriebedingt quadratische Tetraeder-Elemente erforderlich sind, wird die Verwendung von „surface-to-surface contact“ empfohlen, wenn die Kontaktspannungen c_{press} von Interesse sind

BEISPIEL 1.1: PENALTY NODE-TO-SURFACE CONTACT

C3D20



- Negative Knotenkräfte der quadratischen Hexaeder-Elemente C3D20 führen zu Problemen für den „node-to-surface“ Lösungsalgorithmus, da ein ständiger Wechsel zwischen Kontaktschluss und -öffnung entsteht
- Um dieses Problem zu umgehen, modifiziert Abaqus die Elemente durch Erweiterung um einen Knoten im Zentrum der aktiven Kontaktfläche auf der „slave“-Seite
- Im Mittel liefern die C3D27(H,I,R) Elemente nur mäßige Ergebnisse



Randbedingungen:

Step 1: Kontaktbildung

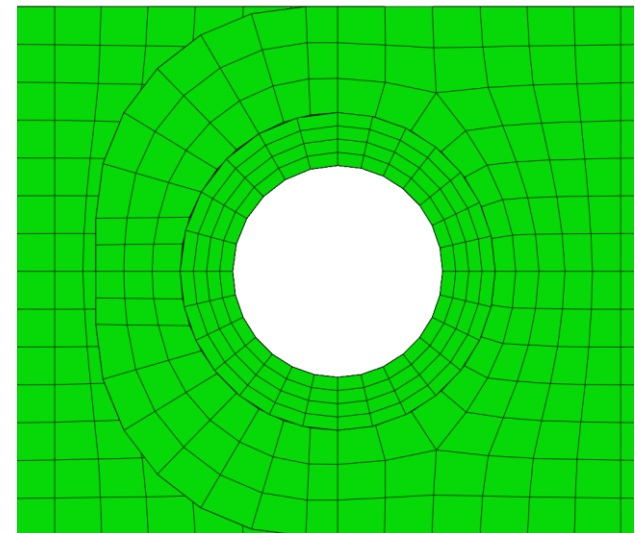
$$\mathbf{t} = \bar{\mathbf{t}} = \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{N} \quad \text{auf } \partial\mathcal{G}_N$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\mathcal{G}_D$$

Step 2: Rotation der Welle

$$\boldsymbol{\phi} = \bar{\boldsymbol{\phi}} = 0.2\boldsymbol{\phi}_2 \quad \text{auf } \partial\mathcal{W}_D$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\mathcal{G}_D$$



Fragestellung:

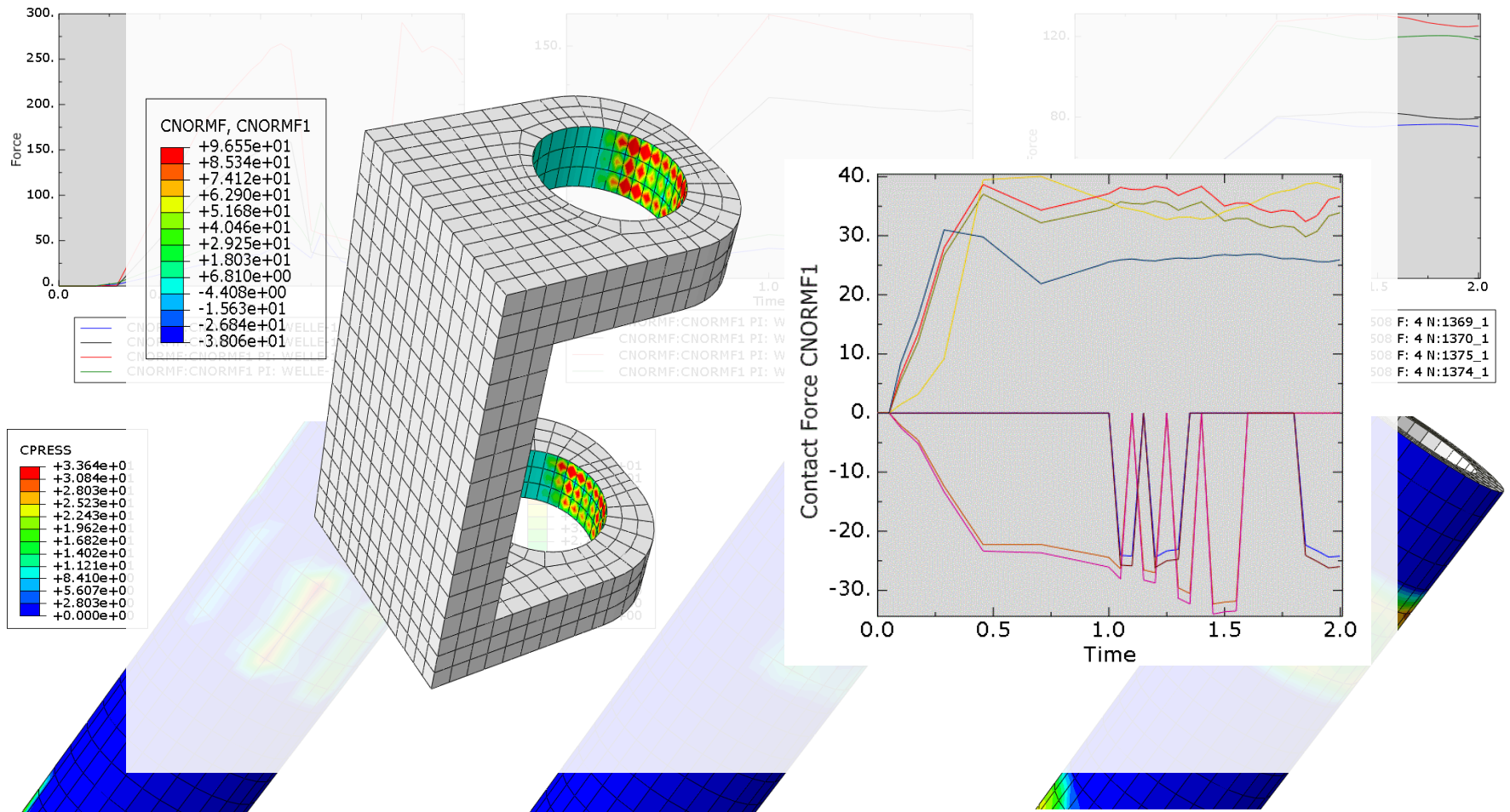
- Was passiert bei diskretisierungsbedingter Verkantung der Bauteile?
- Wie verhält sich „surface-to-surface contact“ bei lokalisiertem Kontakt?

BEISPIEL 2: GABEL-WELLE-GELENK, SURFACE-TO-SURFACE CONTACT

Welle C3D8, Gabel C3D8

Welle C3D8, Gabel C3D20

Welle C3D8 (GS), Gabel C3D8

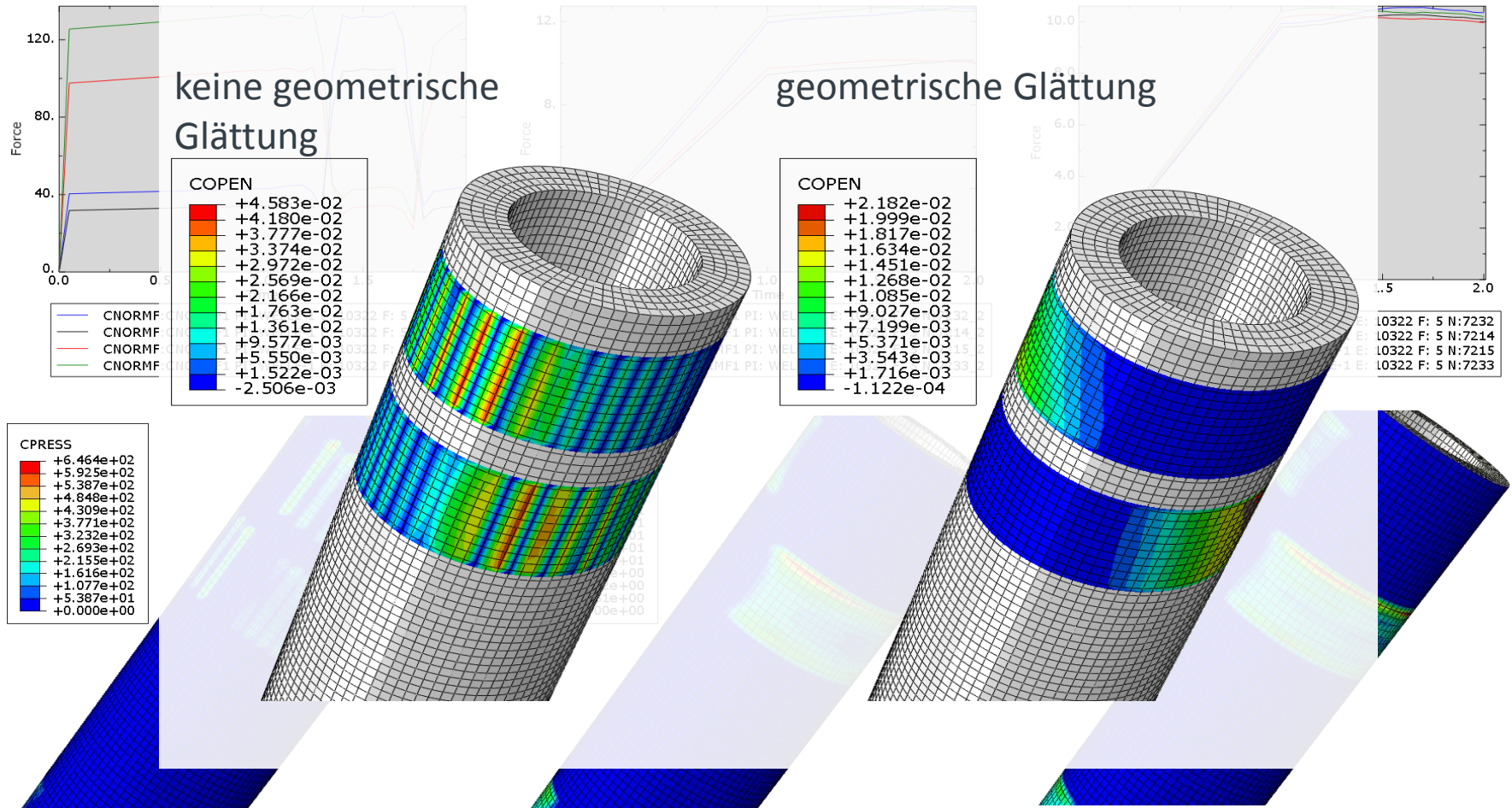


BEISPIEL 2: GABEL-WELLE-GELENK, SURFACE-TO-SURFACE CONTACT

Welle C3D8, Gabel C3D8

Welle C3D8, Gabel C3D20

Welle C3D8 (GS), Gabel C3D8



- Auswertung der Kontaktspannungen und der konsistenten Knotenkräfte ist problematisch für Elemente höherer Ordnung
- Durch „geometric smoothing“ lassen sich diskretisierungsbedingte lokalisierte Kontaktspannungen und Kontaktkräfte auch bei groben Netzen vermeiden

Problem	Vorteilhafte Elementwahl	Vermeiden
Kontakt zwischen deformierbaren Körpern im Allgemeinen	Elemente erster Ordnung (vorzugsweise Hexaeder)	Elemente zweiter Ordnung im „node-to-surface“ Kontakt
Kontakt zwischen deformierbaren Körpern unter Biegung	Reduziert integrierte Elemente erster Ordnung mit zusätzlichen inkompatiblen Moden	Voll integrierte Elemente erster Ordnung und Elemente zweiter Ordnung im „node-to-surface“ Kontakt
Kontakt zwischen Körpern mit komplexer Geometrie	Falls nötig Elemente zweiter Ordnung im „surface-to-surface“ Kontakt	

VIELEN DANK FÜR IHRE AUFMERKSAMKEIT

DR. MARTIN HERRMANN

SYNOPT GMBH

A CENIT COMPANY

INDUSTRIESTRASSE 52-54

70565 STUTTGART

MARTIN.HERRMANN@SYNOPT.DE

DANIEL VALLICOTTI

CENIT AG

INDUSTRIESTRASSE 52-54

70565 STUTTGART

D.VALLICOTTI@CENIT.COM

